

بيتر م. هيجنز

# الرياضيات لأفوليين

ترجمة

أ.د. إلتصارات محمد حسن الشبكي

# الرياضيات للفضوليين



# الرياضيات للفضوليين

تأليف: بيتر م. هيجنز

ترجمة: أ.د. / إنتصارات محمد حسن الشبكي  
مراجعة: أ.د. / بيومي إبراهيم بيومي





الطبعة الثالثة ١٤٣٢هـ - ٢٠١١م

ISBN 978 977 6263 16 1

جميع الحقوق محفوظة للنشر كلمات عربية للترجمة والنشر  
(شركة ذات مسئولية محدودة)

كلمات عربية للترجمة والنشر

إن كلمات عربية للترجمة والنشر غير مسئولة عن آراء المؤلف وأفكاره  
وإنما يعتبر الكتاب عن آراء مؤلفه

مكتب رقم ٤، عقار رقم ٢١٩٠، زهراء مدينة نصر، القاهرة  
جمهورية مصر العربية

تليفون: ٢٠٢ ٢٢٧٢٧٤٣١ فاكس: ٢٠٢ ٢٢٧٠٦٣٥١

البريد الإلكتروني: [kalimatarabia@kalimatarabia.com](mailto:kalimatarabia@kalimatarabia.com)

الموقع الإلكتروني: <http://www.kalimatarabia.com>

هيجنز، بيتر م.

الرياضيات للفضوليين / بيتر م. هيجنز - القاهرة : كلمات عربية للترجمة والنشر، ٢٠٠٨

٢٥٦ ص، ١٤،٥ × ٢١،٠ سم

تدمك: ١٦١ ٦٢٦٣ ٩٧٨ ٩٧٧

١- الرياضيات

أ- العنوان

٥١٠

يمنع نسخ أو استعمال أي جزء من هذا الكتاب بأية وسيلة تصويرية أو إلكترونية أو ميكانيكية،  
ويشمل ذلك التصوير الفوتوغرافي والتسجيل على أشرطة أو أقراص مضغوطة أو استخدام أية وسيلة  
نشر أخرى، بما في ذلك حفظ المعلومات واسترجاعها، دون إذن خطي من الناشر.

Arabic Language Translation Copyright © 2008 Kalimat Arabia

Mathematics for the Curious was originally published in English in 1998.

This translation is published by arrangement with Oxford University Press.

نشر كتاب «الرياضيات للفضوليين» أولاً باللغة الإنجليزية عام ١٩٩٨، ونشرت هذه الترجمة بالاتفاق  
مع مطبعة جامعة أوكسفورد.

© Peter M. Higgins 1998.

All Rights Reserved.

## المحتويات

٧	مقدمة
٩	١- عشرة أسئلة وإجاباتها
٣٥	٢- الحقيقة حول الكسور
٦٩	٣- بعض الهندسة
٩٣	٤- الأعداد
١١٣	٥- الجبر
١٣٥	٦- أسئلة كثيرة وإجاباتها
١٦١	٧- المتسلسلات
١٨٧	٨- الفرص وألعاب الفرص
٢١١	٩- النسبة الذهبية
٢٣٣	١٠- الشبكات



## مقدمة

إن غرض هذا الكتاب هو الاستمتاع، ومن ثم فلك — عزيزي القارئ — أن تنصفه كيفما تشاء، ومع أنه سترد من حين لآخر إشارات لأشياء سابقة، فلن يفوتك الكثير إذا تجاهلتها وتابعت القراءة. غير أنك قد تجد نفس القدر من المتعة إذا تصفحت موضوعات الكتاب مرتبة أو غير مرتبة، وفي حين أن هذا ربما يفتقر إلى النظام، فإنه نهج معظم دارسي الرياضيات. أود أن أشكر كل من ساهم بقراءة مسودات الكتاب، سواء من العاملين أو القراء الذين لم تذكر أسماؤهم بمطبعة جامعة أكسفورد، وأشكر جينييفاف هيجينز Genevieve Higgins والدكتور تيم ليفرز Dr Tim Lavers لمراجعتهم وملحوظاتهم القيمة.

بيتر م. هيجنز

كولشيستر، يوليو/تموز ١٩٩٧



## الفصل الأول

# عشرة أسئلة وإجاباتها

كثير من الأشياء في العالم لها جانب رياضي، ووظيفة الرياضيات هي محاولة فهم هذا الجانب من طبيعة الأشياء، والتفكير في هذه الأمور بشكل رياضي (المنطق الرياضي) غالبًا ما يفسرها وإلا ظلت غامضة أو محيرة، وأحيانًا التعليل المتضمن يكون من السهل فهمه عندما يُعرض.

يتكون هذا الفصل التمهيدي من مجموعة من الأمثلة بهدف إثبات ذلك، فإذا شعرت أنكم أكثر حكمة بعد تصفحها فادعوكم إلى متابعة الاستمرار في القراءة. هذا الكتاب لا يدّعي التعمق في الرياضيات، ولكني آمل من خلاله أن أنقل إليكم نكهة الرياضيات الحديثة، كما يمكن استخدامه لتوضيح بعض جوانب الجبر والهندسة المدرسية، وحتى الحساب الذي كنت دائم القلق لصعوبته إلى حد ما. على سبيل المثال، من المؤكد أنه في إمكان أي شخص فهم نظرية فيثاغورث كما يفهمها عالم الرياضيات المتخصص، فمستوى الصعوبة التي يصادفها تشبه صعوبة تجميع لعبة صور مبعثرة من الحجم الصغير. لا يوجد سبب يوضح لماذا هذا الاهتمام بالجوانب المهمة من الرياضيات التي لا تزال غامضة، فمعظم المفكرين من الناس يمكنهم فهم هذه الجوانب مع قليل من الصبر فهمًا تامًا، بل بعض الجوانب العميقة لرياضيات القرن العشرين يمكن فهمها. آمل أن أعطي القارئ رؤية كافية لبعض أجزاء من عالم الرياضيات لم تكتشف حتى للنوابغ في الماضي.

في المدرسة وكذلك في الجامعة يعمل الطلاب والمدرسون أساسًا للحصول على درجات مرضية في الامتحانات، ولا يوجد غالبًا وقت ليعجب بالمشهد

الرياضي، وهذه ليست حالتنا، فالقارئ هنا لا يرضي أحدًا سوى نفسه، فلسنا في عجلة من أمرنا، كما أننا لا نخشى حكمًا صادرًا على نتائجنّا. تمهل في التفكير فيما يطرح عليك. الورقة والقلم قد يساعدان أحيانًا، لا تمنع نفسك من الرسم والتخطيط، ومع أن هذه الخطوط قد تبدو طفولية وغير مُجدية فإنها مساعدات حقيقية لعملية التفكير ولا تُحتقر أبدًا.

## ١- كم عدد المباريات التي تُلعب في بطولة للتنس؟

هذا هو السؤال العملي الذي من المؤكد أن منظمي البطولة يحتاجون إلي معرفة جوابه. لنأخذ بطولة الجائزة الكبرى (جراند سلام) كمثال، حيث هناك 128 مشتركًا، كل جولة مكونة من أزواج من اللاعبين المتبقين. يلعب كل لاعب مع منافسه بعد قرعة. الخاسرون يخرجون من البطولة ويصعد الفائزون إلى الجولة التالية حتى يتوج البطل. هذه المسألة ليست صعبة في حلها. من الواضح أن هناك  $64 = 128 \div 2$  مباراة في الجولة الأولى ويصعد 64 لاعبًا للتنافس في الجولة الثانية، التي تتطلب لعب  $32 = 64 \div 2$  مباراة، وهكذا. العدد الكلي للمباريات في هذه البطولة يصبح:

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127.$$

المشكلة قد حُلّت، ولكن يبدو أن هناك بذورًا لشيء هام في الإجابة نفسها (127) وهو أن هذا العدد يقل واحدًا عن عدد المشتركين. ماذا يحدث إذن؟ يجب ملاحظة أن عدد المشتركين (128) يثير الفضول في حد ذاته؟ المنظمون اختاروا ببطنة عددًا هو في الحقيقة قوة للعدد 2 أي أن:  $128 = 2^7$  أي  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  وذلك يؤدي إلى التأكد من صعود عدد زوجي من اللاعبين عند نهاية كل جولة، بحيث يسهل تقسيمهم في الجولة التالية (إلا في الجولة الأخيرة حيث يبقى لاعب واحد لم يهزم) فالشخص الذي ينعم بمعرفة ما يُسمى بالمتسلسلة الهندسية يمكنه الآن وضع النقاط على الحروف. إننا فقط نختبر صحة:  $2^7 - 1 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$ .



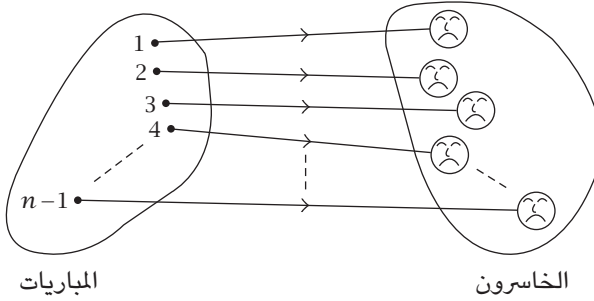
وهي مجرد حالة خاصة من صيغة مجموعات القوى للعدد 2، أنه لأي عدد صحيح  $n$

$$2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2^1 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

أسارع بالتأكيد على أن هذه ملاحظة فنية بعيدة عن الموضوع. ما هي النقطة؟ حتى نرى ما أحاول توضيحه دعنا نُغير المثال قليلاً: نفرض أننا سمحنا باشتراك 100 لاعب بدلاً من 128 في هذه البطولة. هذا قد يحدث في بطولة للهواة حيث نسمح لكل من يرغب في اللعب بدخول المسابقة. واضح أن هناك 50 مباراة في الجولة الأولى و25 مباراة في الثانية لكن بعد ذلك أصبح لدينا عدد فردي من اللاعبين (25). للتعامل مع هذا الوضع، علينا أن نختار أحد اللاعبين عشوائياً ليصعد مباشرة إلى الجولة التالية بدون أن يلعب ويكون هناك إذن 13 لاعباً بعد الجولة الثالثة (12 لاعباً فائزاً من الجولة الثالثة مع لاعب صعد مباشرة دون أن يلعب) وبالتفكير قليلاً نجد أن العدد الإجمالي للاعبين عند بداية كل جولة يكون طبقاً للمتتابعة: 100, 50, 25, 13, 7, 4, 2 ويكون إجمالي المباريات في هذه البطولة هو:

$$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 2 + 1 = 99.$$

مرة أخرى حصلنا على الإجابة بالرغم من الوصول إلى الجواب الأخير بطريقة صعبة قليلاً. فإذا كررنا الحسابات لأعداد مختلفة من المشتركين فإنك ستجد أنه إذا بدأت بعدد  $n$  من اللاعبين فإن عدد المباريات سيكون دائماً  $n - 1$ . أعتقد أنه يجب أن يكون هناك سبب لذلك، أو برهان إذا رغبت. هناك برهان يعتمد على القسمة على 2 ثم تكرار الجمع عدداً معيناً من المرات ويبدو أنه مليء بالصعوبات. الحجة المسؤولة عن الإضافة إلى العدد الفردي للاعبين المتبقين على فترات غير منتظمة، كما فعلنا، ويبدو أنه من الصعب وصف العملية كلها بشكل عام بطريقة دقيقة للوصول إلى النتيجة المطلوبة مع أنها أفكار بسيطة.



شكل ١

هذا النوع من الأشياء يحدث كثيرًا لعلماء الرياضيات، فهم يشعرون بالثقة في افتراض معين، ويبدو للوهلة الأولى أن هناك طريقة مباشرة لإثباته، لكنهم صادفوا صعوبات في إتمام برهان هذا الافتراض. خط معالجة المشكلة يضعك أمام كثير من المساومات ويجعلك مجبرًا على أن تتعامل مع جوانب أخرى لم تكن مهتمًا بها من قبل.

يحدث كثيرًا كما في حالتنا تلك أننا لا نستطيع أن نرى الأشياء الهامة؛ لتركيزنا على التفاصيل الصغيرة، لذلك فالمطلوب العودة إلى الخلف لنلاحظ ما يحدث. الملاحظة الأساسية هي أن عدد المباريات هو بالضبط عدد الخاسرين. يخرج من كل مباراة لاعب خاسر وكل لاعب فيما عدا اللاعب الفائز بالبطولة، سوف يخسر مباراة واحدة. ومن ثم يجب أن يكون هناك دائمًا عدد من المباريات يقل واحدًا عن عدد اللاعبين.

هذا برهان جميل (عادل). يمس لب المشكلة مباشرة ويسمح لنا أن نفهم ما يحدث بتقديم سبب واضح لا شبهة فيه عن سبب هذه النتيجة وكونها دائمًا بهذا الشكل. بالرغم من بساطة وقصر هذا الاستنتاج فليس من السهل بأي حال من الأحوال الوصول إليه، فلذلك لا تخجل إذا لم تفهم، أما إن استطعت إدراكه فلك الحق في أن تهني نفسك.

هذا المبدأ (التناظر واحد مع واحد) بين مجموعة ما لدينا ومجموعة أخرى أسهل نسبيًا في الحساب [انظر الشكل ١] يظهر دائمًا في نظرية العد والاحتمالات.

الفكرة بسيطة كما تبدو ولكنها بحق فكرة جيدة. من حق الفرد أن يعيد التفكير، على الأقل إذا وجد الحل سريعاً. أعلم هنا أنني أبالغ لأن الفكرة واضحة بشدة. على أية حال أنا أعرف أن أذكاء الناس دائماً ما يحدقون في مسألة كتلك التي في حالتنا لساعات دون أن يكتشفوا التناظر الأساسي تماماً. من المتوقع أن يواجه علماء الرياضيات صعوبات أقل، لكنهم أساساً قد تعلموا هذه الحيلة. إنها غير واضحة بالفعل، فقط هي بسيطة، ومن ثم فهي سهلة فعلاً مادمت رأيتها.

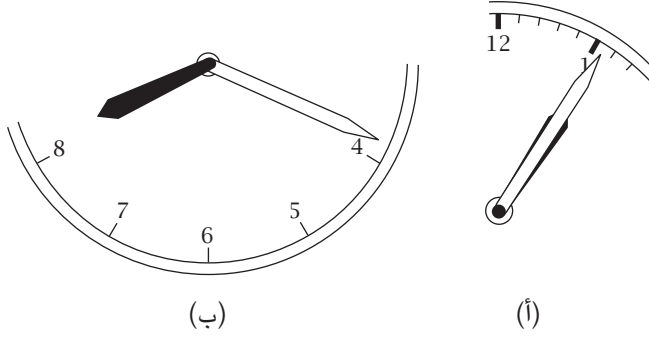
مسألة مشابهة تتعلق بتقسيم قطعة من الشيكولاتة على شكل مستطيل.

## ٢- ما هو أقل عدد من الكسر المطلوب لتقسيم عمود من الشيكولاتة إلى رقم فردي؟

لنفرض أن لدينا كتلة من الشيكولاتة  $4 \times 5$  تحوي 20 قطعة. جواب السؤال سيكون: 19. لماذا؟ لأنه في كل مرة تكسر قطعة الشيكولاتة فإن العدد الكلي للقطع يزيد واحدًا. لأنك بدأت بقطعة واحدة فإنك تحتاج إلى كسر قطعة الشيكولاتة 19 مرة حتى تحصل على العشرين قطعة. دائماً هناك الكثير لتتعلمه من أي مشكلة بعد حلها. تذكر أنك لا تحاول الحصول على درجات في امتحان ما ولكنك تحاول تعلم شيء عن الرياضيات. هناك الكثير من الأشياء يمكنك استنتاجها إذا ما أخذت لحظات في التفكير في ما شاهدته.

أولاً: حقيقة أن قطعة الشيكولاتة كانت مستطيلاً لم تسهم في الحل. أي أنها يمكن أن تكون كتلة واحدة من أي شكل.

ثانياً: حصلنا على الحل بكتلة من 20 قطعة مربعة، وهذا سيكون صحيحاً لأي عدد من المربعات. بشكل عام: إذا كان هناك  $n$  مربعاً فإن عدد مرات الكسر المطلوبة هو  $n - 1$ . وهذا هو التفكير الرياضي، إيجاد نتائج ومبادئ عامة أكثر من حل مسألة ذات قيمة خاصة مثل 20 في هذه



شكل ٢

الحالة. سوف تصادف هذه الفكرة (الاستفادة من الحالة الخاصة إلى الحالة العامة) في مناسبات عديدة خلال هذا الكتاب.  
في النهاية: كنا نبحث عن أقل عدد من مرات الكسر، لكن برهاننا يوضح أنه أكبر عدد أيضًا. على أية حال دعنا نرى ذلك،  $n - 1$  من الكسور ينتج عدد  $n$  من القطع. النتيجة لا تعتمد على طريقة العمل. لا توجد طريقة خاصة متميزة لفعل ذلك. قد يكون هذا مخيبًا للآمال، لكن يجب معرفته جيدًا. هذه واحدة من استخدامات الرياضيات. تخبرك دائمًا عندما تهدر وقتك محاولاً أن تفعل المستحيل.

مشكلتنا الثالثة تتعلق بوجه الساعة، سوف نحلها بثلاث طرق.

### ٣- متى ينطبق عقربا الساعة؟

لنكن أكثر تحديدًا. متى ينطبق عقرب الدقائق بالضبط على عقرب الساعات؟  
- بعد الساعة 12 ظهرًا. (انظر الشكل ٢(أ)).

يمكننا أن نرى فوراً أن ذلك يحدث بعد قليل من الوقت 1.05، ولكن متى بالضبط؟

هناك حل سريع: بعد مرور الساعة 12 ظهرًا حتى منتصف الليل يوجد 11 فرصة لتطابق عقربي الساعة (نعم 11 وليس 12) وكلها على فترات زمنية متساوية ولذلك فإن الزمن بين تطابقين متتاليين يجب أن يكون  $1\frac{1}{11} = 12 \div 11$  من الساعات وهو تقريبًا ساعة و5 دقائق و27 ثانية.

هذا هو الحل الذي استغل التماثل الكامن في السؤال: الأزواج المتتالية من التطابق متساوية البعد. على أية حال، هذا الحل يترك الشعور بعدم الارتياح أن نسيج الرياضيات قد أعمى أعيننا. إن عد التطابقات يتطلب بعض التفكير، والطريقة التي تركنا بها إحدى نقاط النهاية (الظهر) وأخذنا النقطة الأخرى (منتصف الليل) قد تبدو مشكوكًا بها. قد يكون من الأوضح أن نبدأ من نقطة أخرى — مثلاً الساعة الواحدة — ونتأكد من حدوث 11 تطابقًا خلال فترة الـ 12 ساعة التالية. تتجنب هذه الطريقة أية صعوبات تظهر من نقاط النهاية للفترة الزمنية المستخدمة.

على أية حال هي مسألة جميلة. ولهذا دعنا نحلها مرة أخرى، هذه المرة نبعتها بطريقة مختلفة. دعنا نتخيل أن رأس عقرب الدقائق ورأس عقرب الساعات على الترتيب يمثلان اثنين من هواة الجري حول مسار دائري.

عقرب الدقائق يكمل بالضبط دائرة في الساعة بينما عقرب الساعات يزحف ببطء شديد إلى  $\frac{1}{12}$  من الدائرة في الساعة. السؤال الآن: متى يتخطى عقرب الدقائق أولاً عقرب الساعات؟

نترجم المسألة بمعادلة سهلة كما يلي:

بعد  $t$  من الساعات لف عقرب الدقائق الدائرة  $t$  من المرات بينما عقرب الساعات حصل فقط على  $\frac{t}{12}$  من المرات حولها. فمثلاً إذا كانت  $t = 4$  فإن عقرب الدقائق لف حول الدائرة بالضبط أربع مرات بينما عقرب الساعات وصل إلى  $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$  من الدائرة أي أنه في الساعة الرابعة. المسألة الآن هي إيجاد قيمة  $t$  التي عندها يتخطى عقرب الدقائق لأول مرة عقرب الساعات. سيكون هذا هو الوقت الذي يقطع فيه عقرب الدقائق لفة كاملة أكثر مما

يفعله عقرب الساعات. وينتج عن ذلك تلك المعادلة:

المسافة المقطوعة بواسطة عقرب الدقائق

$$= \text{المسافة المقطوعة بعقرب الساعات} + 1$$

أي أن:

$$t = \frac{t}{12} + 1.$$

بتبسيط هذه المعادلة نحصل على:  $1 = \frac{11}{12}t$ . أي أن الحل بالساعات هو:  
 $t = \frac{12}{11} = 1 \frac{1}{11}$ .

هذه الطريقة يمكن استخدامها لحل أي مسألة من هذا النوع. فمثلاً ساعات العرض التي لا تعمل لدى الجواهرجي دائماً ثابتة على زمن 20 دقيقة بعد الثامنة. حيث يكون عقربا الساعات والدقائق على مسافات متساوية من الرقم 6 على وجه الساعة (انظر الشكل ٢(ب)).

اللحظة الأكثر دقة التي يحدث فيها التماثل هي:  $18\frac{6}{13}$  دقيقة بعد الثامنة. المعادلة التي نحتاجها معقدة قليلاً هذه المرة. لكل دقيقة تمر، يتحرك عقرب الدقائق بمسح  $6^\circ = \frac{360^\circ}{60}$  بينما عقرب الساعات يمر إلى  $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$  من هذه الزاوية أي نصف درجة. ومن ثم بعد  $t$  من الدقائق بعد الثامنة فإن الزاوية بين عقرب الدقائق والخط المار من مركز وجه الساعة إلى الرقم 6 تُعطى بـ  $180 - 6t$  من الدرجات. الزاوية المناظرة لعقرب الساعات تبدأ عند  $60^\circ$  وتزداد بمقدار  $\frac{t}{2}$  درجة في كل دقيقة. نرغب في إيجاد قيمة  $t$  عندما تتساوى الزاويتان، أي المطلوب حل المعادلة:

$$180 - 6t = 60 + \frac{t}{2}.$$

وهذا يؤدي إلى:

$$\frac{13t}{2} = 120,$$

ويعطي قيمة  $t = 18\frac{6}{13}$  دقيقة كما ذكر سابقاً. فالنتيجة هي: 18 دقيقة و28 ثانية بعد الساعة الثامنة مقربة لأقرب ثانية.

الحل النهائي لهذه المسألة هو أقل براعة وأكثر تعقيداً من الناحية الرياضية، ومع ذلك فهو يستخدم الاتجاه الذي يتبناه معظم البشر بشكل طبيعي لهذه المسألة وهي تقنية (أخيل<sup>١</sup> والسلفاة). لأننا نستطيع رؤية الحل التقريبي على الفور فالطريقة العملية التي لا تقاوم أن نتابع التقريبات المتتالية كالآتي:

يظهر التطابق الأول بعد الساعة الواحدة فنتخيل أن عقربي الساعة يقفان عند هذا الوقت. بعد خمس دقائق أخيل (عقرب الدقائق) قد وصل إلى الرقم «1» في الساعة. بينما السلفاة (عقرب الساعات) في نفس الوقت تحرك قليلاً، وطلباً للدقة حيث إن  $\frac{1}{12}$  من الساعة مرت، والسلفاة تتحرك بسرعة  $\frac{1}{12}$  من محيط الدائرة كل ساعة، تكون السلفاة قد قطعت مسافة مقدارها  $(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12})$  من الساعة، ويسمح هذا الوقت لأخيل أن يصل إلى مكان السلفاة التي تكون قد قطعت مسافة مقدارها  $(\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12})$  من الساعة، وهكذا.

لا يبدو هذا حلاً على الإطلاق، فقط مجرد سلسلة متعاقبة من التقريبات الأحسن ثم الأحسن. في الواقع، ظن اليونانيون في العصور القديمة أن هذه الوسيلة تقود إلى صعوبات لا يمكن تخطيها لأنها تنتج قائمة لا تنتهي من المهام، على أخيل أن يؤديها قبل أن يلحق بالسلفاة. قد يستغرق ذلك وقتاً لانهائياً، فالمسكين أخيل لن يمكسك بالسلفاة أبداً. وهذه واحدة من مفارقات زينو Zeno's Paradoxes.

لا داعي للانزعاج؛ فالحقيقة أننا تخيلنا فترة زمنية محدودة كمجموعة لانهائية من فقرات صغيرة ولن يسبب أي صعوبة لأخيل. الفرض الخاطئ الذي أدى إلى تلك المفارقة هو أننا عندما نجمع متتابعة لانهائية من الأعداد الموجبة فإن المجموع يجب أن يتجاوز كل الحدود. قد يبدو هذا معقولاً، لكننا

<sup>١</sup> أخيل: بطل أسطوري في الأساطير اليونانية القديمة كان محمياً بواسطة سحر، والمكان الوحيد الذي يمكن أن يؤذي منه هو عقب قدمه.



أثبتنا أن ذلك غير صحيح. بعد أن قمنا بحل هذه المسألة - مرتين - يمكن أن نستنتج أن:

$$1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \dots = 1\frac{1}{11}.$$

ماذا يعني ذلك؟ هذا يعني أن  $1\frac{1}{11}$  هو أقل عدد لا يمكن تجاوزه بإضافة أي عدد محدود من حدود (أعداد) هذه المتتابعة اللانهائية. بأسلوب آخر: المجموع الذي نحصل عليه بجمع المزيد والمزيد من الحدود سوف يزداد ويزداد لكنه لن يتعدى قيمة النهاية  $1\frac{1}{11}$ .

وهذا يعتبر مثلاً آخر عن المتسلسلات الهندسية. وقد صادفنا واحدة منها في سؤالنا الأول عن بطولة التنس. (حيث كانت تحتوي على قوى للعدد 2 وعدد محدود من الأرقام). وسوف نتحدث أكثر عن هذا النوع الهام من المتسلسلات في فصل لاحق، لكن لإشباع الفضول عن هذا الموضوع بشكل مؤقت سنقول (بطريقة عابرة) إن المتسلسلة:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots,$$

حيث  $r$  عدد موجب أقل من 1 له قيمة نهائية تساوي  $1/(1-r)$ . في مثالنا  $r = \frac{1}{12}$ ، والمثال الأبسط عندما  $r = \frac{1}{2}$  فتكون صيغة المجموع:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1 / \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 / \frac{1}{2} = 2.$$

وسؤالنا عن الساعة قد أثبت بطريقة مثمرة صحة هذا المجموع. مسألتنا الرابعة أسهل.

#### ٤- هل تخفيض 10% تليها زيادة 10% ليس لها تأثير إجمالاً؟

عامل يتقاضى أجره بالساعة، تم تخفيض هذا الأجر 10% بينما زادت ساعات عمله بنسبة 10%. رئيسه في العمل أكد له أن هذا لمصلحته. لأن

الرئيس قد أُجبر على تخفيض الأجر حتى يظل قادرًا على المنافسة، وزاد عدد الساعات كنوع من الترضية:

«أنت الآن تحصل على 10% أقل في الساعة لكن لديك 10% زيادة في عدد الساعات فيصبح أجرك الأسبوعي كما هو».

هل هذا صحيح؟ لنفرض أن أجر العامل كان 100 جنيه استرليني في الأسبوع، حُقِّص أجره عن الساعة بنسبة 10% فمعنى ذلك أن أجره الأسبوعي قد أصبح 90 جنيهًا استرلينيًا. عدد الساعات زيد بنسبة 10% أي 10% من 90 جنيهًا استرلينيًا، هذا يزيد أجره الأسبوعي إلى  $90 + 9 = 99$  جنيه استرليني وليس 100 جنيه استرليني.

هل يساعد في ذلك إذا حسبنا بطريقة معكوسة؟ نتخيل أننا زدنا عدد الساعات أولًا بنسبة 10%، ما يعني أن مرتبه يرتفع إلى 110 جنيه استرليني، ثم خفضنا أجر الساعة بنسبة 10%، فإن 10% من 110 هي 11 أي أن أجره انخفض إلى  $110 - 11 = 99$ ، بأي طريقة نحسبها فإن العامل سوف يخسر. يبدو ذلك ظالمًا — الرياضيات تبدو متآمرة مع رئيس العمل لاستغلال العامل. على أية حال ما هو الخطأ في حجة رئيس العمل؟

حجة رئيس العمل معيبة، والعيب يقع في أنه لم يحدد الموضوع عندما تحدث بطلاقة عن 10%. إذا أنت خفضت بنسبة 10% ثم زدت ما معك الآن بنفس النسبة فإنك لن تعود أبدًا إلى ما بدأت به. مهما كان الترتيب في الزيادة والخفض فالنتيجة ستكون دائمًا انخفاض 1%.

يبدو أننا بصدد افتقار شديد للتماثل. دعنا ندرس مسألة أخرى لنرى هل نتمكن من استعادة التوازن. لنفرض أن العامل قد حصل على زيادة في أجر الساعة بنسبة 10% وانخفضت ساعات عمله بنسبة 10%، أعتقد أن هذا هو الوجه الآخر للعملة — مرتبه الأسبوعي سيرتفع الآن إلى 101 جنيه استرليني؟

أخشى أن يكون هذا ما نتمناه أن يحدث بالرغم من أن ذلك غير ممكن. لكن إذا بحثت الأمر فسوف ينتهي عند 99 جنيه استرليني مرة أخرى.

بالرغم من أن العامل تبعاً لهذه القاعدة سيكون لديه عدد ساعات عمل أقل (الحسابات هي نفسها كما سبق وتستطيع أن تجرب ذلك بنفسك). مرة أخرى، ليس من الصعب الرؤية خلال اللغز. لتكن  $P$  هي الأجر الأسبوعي للعامل. في كلا الحالتين يُتخذ إجراءان: أحدهما يؤثر بزيادة الأجر بنسبة 10% أي حاصل ضرب  $P$  في  $1.1 = 1 + 0.1$ ، والآخر يخفض الأجر بنفس النسبة ونحصل عليه بضرب الأجر  $P$  في  $0.9 = 1 - 0.1$ . الترتيب الذي يتم به هذا العمل غير هام، إذن:

$$P \times 1.1 \times 0.9 = 0.99 \times P = P \times 0.9 \times 1.1,$$

ومن ثم فإن هذا العامل الفقير دائماً ما ينتهي به الأمر بفقد 1% من أجره نتيجة لهذا الزوج من التغييرات. نلاحظ أننا عممنا المسألة مرة أخرى، ولأسباب جيدة، فإن دراسة الموقف العام يجعل الأمر أكثر وضوحاً وذلك لأننا أصبحنا أقل انشغالاً بالجوانب الخاصة للحالة (وهي القيمة الفعلية للأجر  $P$ ) حيث إنها لا تؤثر بصورة كبيرة على المشكلة القائمة.

المشاكل والبراهين التي تحوي على نسب مئوية تسبب الكثير من الالتباس ولا يمكن تجاهلها لأنها تتغلغل في جميع تعاملاتنا المالية وأشياء أخرى كثيرة. لكن ما النسبة المئوية ولماذا تظهر باستمرار؟

الجزء الأول من السؤال إجابته سهلة. 1% من أي مقدار هو ببساطة جزء قدره  $\frac{1}{100}$  من المقدار. لماذا نضع كل هذا التركيز على هذا الكسر الخاص؟ الإجابة واقعية تماماً ولهذا السبب فهي لا تحظى بأهمية كبيرة لدى علماء الرياضيات (بالرغم من أن المشاكل التي تحتوي على فائدة مركبة أصبح لها مضمون رياضي، وقادت إلى أسئلة ليست مجرد أسئلة حسابية بسيطة، وسوف نتعرف على الكثير لاحقاً).

ما نستخدمه هو قوى العدد  $(10^2 = 100)$  لأنه أساس النظام العددي الذي اخترناه للتعامل به. (بلا شك بسبب عدد أصابعنا). ربما تعلم أن نظام الحاسب دائماً يستخدم الأساس «2» أو النظام الثنائي ولهذا فإن الرمزين 0، 1 هما المطلوبان ليناظرا لحالي الآلة: لا يعمل (off) ويعمل

(On). وقد تكرر الدفاع عن الحساب بالأساس «12» النظام الاثني عشري، ادعى المطالبون به أن ذلك قد يجعل العمليات الحسابية أكثر سهولة وأكثر فهمًا إذا استعملنا 12 كأساس للنظام؛ لأن العدد «12» له عوامل أكثر من عوامل العدد «10». ويجبرنا ذلك على تقديم رمزين جديدين للعديدين 10، 11، لكن الأساس 12 سوف يستخدم تمامًا مثل الأساس 10. فمثلاً العدد 171 بالنظام العشري المعتاد سيصبح 123 بالنسبة إلى النظام الاثني عشري، بمعنى أنه:  $3 + 2 \times 12 + 1 \times 12^2$ . أي عدد ينتهي (رقم أحاده) بالرقم 3 في الأساس 12 هو مضاعف للعدد 3 (أي يقبل القسمة على 3) لأن 3 عامل من عوامل 12. وينظر هذا الموقف بالضبط ما يحدث في النظام العشري، حيث إن كل عدد ينتهي بالرقم 5 في النظام العشري هو مضاعف للعدد 5، وليس من الواضح أن 171 مضاعف 3 في النظام العشري (ولكن يمكن التحقق من ذلك بجمع أرقامه والتأكد من كون المجموع مضاعفًا للعدد 3 ومن ثم في حالتنا هذه متحققة — حيث مجموع أرقامه «9».

كما في لغة الاسبرانتو<sup>٢</sup> النظام الاثنا عشري سيكون له بدون شك مزايا كثيرة إذا استطاع العالم أن يواكب التغيير. وسيظل النظام الاثنا عشري فكرة منطقية سليمة لا يتبناها أحد.

لماذا أعطينا اسمًا خاصًا للكسر  $\frac{1}{100}$  بدلاً من  $\frac{1}{10}$  أو  $\frac{1}{1000}$ ؟

الأعداد الصغيرة أسهل في التعامل معها من الأعداد الكبيرة، وهذا هو السبب لرفض العدد 1000. إن الميزة العملية الأساسية للعدد 100 على العدد 10 — كقاعدة عملية — هي أن الكسر  $\frac{1}{100}$  من أي كمية هو أصغر جزء له معنى، فمثلاً خُفُضَ الأجور بنسبة 1% كبير بما فيه الكفاية ليشعرنا بالضيق. ومن ثم من الطبيعي أن نعطيه اسمًا خاصًا، (هو النسبة المئوية) للكسر  $\frac{1}{100}$ . وتأثير ذلك هو أنه في معظم المناقشات المتعلقة بالأمور المالية خصوصًا ستكون الأعداد المستخدمة ذات حجم معقول يمكن عده على أصابع اليدين والقدمين.

<sup>٢</sup>(لغة اصطناعية) اخترعت سنة ١٨٧١ لتساعد الناس من مختلف الدول ليتحدث بعضهم إلى بعض (محاولة لتوحيد العالم).

وتلك النقطة العملية، الحجم الفعلي للوحدات، عامل غالبًا ما يغفل عنه عندما تناقش مزايا نظام من الوحدات على الآخر. أنا متأكد أن كل واحد تقريبًا يفترض أن الأشخاص ذوي الميول العلمية المهرة في التعامل مع الأعداد سيفضلون بشكل تلقائي النظام المترى للقياس على النظام الإنجليزي (البوصة، القدم ...) لكن الحقيقة غير ذلك. على أية حال، فإن كلاً من النظامين له مزايا وعيوب نسبية. النظام المترى له وحدات تعتمد على قوى 10. تجعله متوافقًا مع الحساب بالأساس 10 وهي تمنحه سهولة في العمليات الحسابية. هناك توافق آخر في وحدة الحجم (التر) جرى اختياره حتى يكون لتر واحد من الماء النقي يزن كيلوجرامًا واحدًا. هذه أيضًا فائدة عملية. حجم المتر، على الرغم من أنه اختياري محض، يمكن للفرد أن يقول باستخفاف إنه يساوي  $(\frac{1}{10,000,000})$  من المسافة من خط الاستواء إلى القطب الشمالي. هذا يجعله وحدة طبيعية بطريقةٍ ما لكنها ليست طريقة جيدة للاستخدام الواقعي.

من ناحيةٍ أخرى فإن الحجم الفعلي للوحدات الإنجليزية للبوصة والقدم هي بالفعل مقاييس عملية جدًا. لأنها تتماشى مع المقاييس البشرية للأشياء بعكس السنتيمتر (صغير جدًا) والمتر كبير (نوعًا ما). تتراوح أطوال البشر ما بين 5-6 أقدام وأيديهم ما بين 6-8 بوصة.

ومن ثم فهم يحيطون أنفسهم بأشياء من نفس المقاييس، التي تقاس بارتياح بوحدات من القدم والبوصة. سبب آخر لتفضيل الوحدات القديمة هو أن كلمات مثل: «قدم وبوصة» أقصر وأسهل على اللسان من سنتيمتر وما شابه ذلك. ومع أن هذه نقطة لغوية تمامًا فإنها ليست أقل أهمية. فعبارات مثل (فاتت بميل) و(تحرك على طول) هي تعبيرات مفيدة ولا تترجم إلى النظام المترى بطريقة عادية الاستخدام. لو احتوى القدم على 10 بوصات لغزا النظام الإنجليزي العالم.

بالضبط كما أنه من الممكن للناس تعلم لغتين، فإنه من الممكن أن توظف بشكل جيد نظامين للقياس. وآمل أن كلا النظامين يبقى على قيد الحياة لفترة طويلة. وأن نتعلم أن نكون أكثر تعايشًا معهما.

لا يوجد سبب لأن نتهم أحدهما أو الآخر بالهرطقة، فكلهما جزء من ثقافتنا.

الكلام عن جزء أو أجزاء له معنى فقط إذا علمنا ما هو الهدف من وراء النقاش كما رأينا في المثال، الارتباك والغموض نشأ عندما سمحنا لأنفسنا بالكلام عن 10% كما لو كانت شيئاً معزولاً — هي فقط 10% من شيء ما ونحتاج أن نعرف ماهية هذا الشيء.

الادعاء العام أنه لا يمكنك الحصول على أكثر من 100% لأي شيء، ومن ثم فإن بياناً يحتوي على نسبة أكثر من 100% هو أصلاً بدون معنى. من المؤكد أن بياناً مثل: «ثمن الأسهم في Fabtex قد انخفض بنسبة 150%» ليس له معنى، غير أن أسهم Fabtex يمكن أن يرتفع ثمنها بنسبة 150%، وهذا يعني ببساطة أن الزيادة في السعر تساوي 1.5 ثمنها الأصلي.

حديثاً تعرض أحد مراسلي التلفزيون للنقد عندما قال إن نسبة البطالة في المدينة قد ازدادت من 20% إلى 25% بزيادة 5% فقد قام عدد كبير من المواطنين بالاتصال بمحطة التلفزيون لتوضيح أن المقدار ازداد من 20 وحدة إلى 25 وحدة، وتكون النسبة المئوية

$$\frac{25 - 20}{20} \times 100 = 25\%;$$

أي أن الزيادة تساوي ربع العدد الأصلي. في هذه الحالة المقدار في السؤال هو نسبة مئوية وهذا لا يهم فقد زادت بنسبة 25% وليس 5%. ملاحظة المعلق لها معنى (في الحقيقة) لأن الزيادة في عدد العاطلين هي 5% بالنسبة للقوى العاملة بالمدينة. مرة أخرى هي ببساطة مسألة اتفاق لإلى أي شيء نشير عندما نتكلم عن نسبة مئوية معينة.

وأعترف أن مسألة أجور العمال، بالرغم من أنها تبدو فضولية، إلا أنها من وجهة نظر رياضية بحتة أقل اهتماماً من أسألتنا حتى الآن. مع أنني رأيت مثلاً لطالبة حصلت على نتيجة مشابهة لنتيجة لعملية ضرب. فقد لاحظت أنك إذا أخذت أي عدد مثل 10، وضربت العدد السابق له في العدد التالي له أي  $11 \times 9$  فسوف تحصل على مربع هذا العدد ناقصاً

واحد أي أن:  $100 - 1 = 99 = 9 \times 11$ . لقد سألتني بحماس: «أليس هذا مذهلاً؟». وبقدر ما كنت متردداً بفعل أي شيء لكبح الحماس في الطالبة فقد أخبرتها أن هذا ليس مذهلاً كما تتصور ويمكن شرح هذا على الفور. كل ما لاحظته الطالبة هو لأي عدد  $n$

$$(n - 1)(n + 1) = n^2 - 1.$$

أي شخص ما زال يتذكر جبر المدرسة الثانوية سوف يستطيع ضرب الأقواس في الطرف الأيسر ويحقق هذه المتساوية الصغيرة. مرة أخرى نرى أن بعض الأشياء قد تبدو غامضة وصعبة للشرح. لكنها تصبح واضحة تمامًا عند اختبارها في الحالة العامة. فإذا لم تكن على دراية بمعلومات الجبر السابقة فلا تنزعج فسوف نعود إلى هذه الأشياء في فصل لاحق. إنها بالفعل تأخذ بعض التبرير، وهذا يعطي بعض الحق لتعجب تلميذتي وانزعاج العمال. حتى الرياضيات البسيطة مثل هذه تحمل درجة من التطور.

## ٥- أيهما أفضل أداء؟

باسم الكفاءة والنزاهة، تكون مؤشرات الأداء في كل مكان، فمعظمنا نخضع لها. ونموذج واحد يظهر عادةً كدورات لمقاييس الأداء وتكرارها هو أن الأداء يتحسن، والتحسين أكثر مما كنا نعتقد. هذا ينطبق على كل شيء من نتائج الامتحانات لتلاميذ المدارس إلى تقليل معدلات الجريمة إلى تقديرات الأبحاث الجامعية.

مقاييس الأداء تركز الذهن على هذه المقاييس وليس كثيرًا على الأداء، كتحقيق نسبة أداء جيدة — يتعلم الناس كيف يعمل اللعب. هدف قياس الأداء ليس سهلاً كما تتوقع. حتى في مجال الألعاب الرياضية تظهر الصعوبات بأوضاع غير مؤذية تمامًا. هنا نعرض مثالاً بسيطاً:

مؤشر الأداء الرئيسي للرامي في لعبة الكريكت (للذين أكثر معرفة بلعبة البيسبول يمكن التفكير في الرامي على أنه pitcher) هو متوسط عدد



المرات التي يقوم بها runs he concedes per wicket هو الأفضل. نفرض في مباراة واحدة أحد الفريقين له اثنان من الرماة، A، B حيث عادا بالأرقام التالية:

في الجولة الأولى: أحرز A 3 تصويبات من 60 لعبة، بينما أحرز B 2 من 68.

في الجولة الثانية: أحرز A 1 من 8 وأحرز B 6 من 60. في الجولة الأولى A له الأداء الأعلى لأن لديه متوسط 20 رمية للهدف بينما B له متوسط 34. في الجولة الثانية مرة أخرى A له الشكل الأفضل؛ لأن له متوسط 8 بينما B له متوسط 10. على أية حال، إذا نظرنا الآن على كل أداء المباراة للاعبين فسوف نرى أن A أخذ 4 من 68 بمتوسط 17 بينما B أخذ 8 أهداف من 128 رمية بمتوسط 16. ولهذا نرى أن النتيجة غير مستساغة أن B له أعلى أداء عن A، لكن كأداء (باستخدام نفس مؤشر الأداء) فإن A أعلى من B في كل جولة.

مسألتنا السادسة لها طبيعة مختلفة تمامًا. إنها لتحقيق خاصية الأعداد التي تواجه الناس.

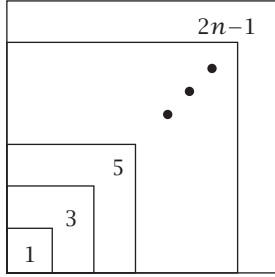
## ٦- لماذا إضافة أعداد فردية متتالية يؤدي إلى أعداد مربعة تامة؟

$$1 = 1^2, \quad 1 + 3 = 4 = 2^2, \quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2, \dots$$

جرب حالة أو اثنتين إضافية. بلا شك، ستشعر أنك تكتب صيغة عامة للتعبير عن هذا التخمين (قضية مفتوحة): مجموع  $n$  من الأعداد الفردية الأولى هو  $n^2$ .

أنت تحتاج لرؤية كيف تعبر عن العدد النوني الفردي بدلالة  $n$  لتفعل ذلك. العدد الفردي الأول 1 والعدد الفردي الثاني 3 والثالث 5 وهكذا، أي أن النمط هو مضاعفة ترتيب العدد وطرح واحد. أي أن العدد النوني



شكل ٣

الفردى هو  $2n - 1$  ( $2n$  هو اختصار لـ  $2 \times n$ ). ومن ثم التخمين لدينا يكتب:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2. \quad (1)$$

نحن فعلاً اختبرنا هذه الصيغة للأربع قيم الأولى لـ  $n$ ، لكن هل نستطيع الحصول على حجة مقنعة في الحالة العامة؟ هناك الكثير منها. سوف أعطي حجة ذات طابع هندسي. الفكرة أخذ شكل بسيط وحساب مساحته بطريقتين مختلفتين تتفق كل منهما مع أحد طرفي المعادلة. الشكل الواضح هو تجربة المربع الذي طول ضلعه  $n$  حيث إن مساحته هي  $n^2$ ، ومن ثم نجزئ المربع إلى شرائح غير متداخلة كما في الشكل ٣، الشريحة في الركن ليست شريحة بالضبط ولكن مربع  $1 \times 1$ . لأن كل شريحة تتكون من الذي قبلها بإضافة مربعين واحد عند كل من النهايتين نرى أن المساحة الكلية لهذه الشرائح هي  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$  كما هو متوقع.

كما ذكرت سابقاً، فهذه الحجة القائمة على ألعاب الصور المقطعة يمكن استخدامها لإثبات نتائج مهمة كثيرة، بما في ذلك النظرية الشهيرة لفيثاغورث كما سنرى في الفصل الثالث.

مسألتنا التالية مشابهة تماماً، بالرغم من أن الحل الذي اختير مختلف تماماً.

## ٧- ما مجموع $n$ من أعداد العد الأولى؟

سوف نثبت أن الإجابة هي:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

من السهل جدًا عليك اختبار أن هذه الصيغة صحيحة للأعداد الصغيرة. فمثلاً  $\frac{(10 \times 11)}{2} = 55 = 1 + 2 + \dots + 10$  كما تقترحه الصيغة السابقة. البرهان المعطى هنا ناتج من إعادة ترتيب المجموع. سوف نجمع الحد الأول على الحد الأخير والثاني على الحد قبل الأخير وهكذا، فنحصل على:

$$(1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \dots$$

الفكرة وراء ذلك أن المجموع في كل من هذه الأقواس هو نفس العدد  $n + 1$ . كل ما علينا فعله هو ضرب هذا القوس بعدد الأزواج للحصول على الإجابة. هذا سهل إذا كانت  $n$  عددًا زوجيًا، فإن عدد الأقواس يكون عندئذ  $\frac{n}{2}$  ونحصل على النتيجة  $(\frac{n}{2}) \times (n + 1)$  (وهي نفس الصيغة السابقة). فمثلاً عند  $n = 10$ :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + 10 &= (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) \\ &\quad + (4 + 7) + (5 + 6) \\ &= 11 + 11 + 11 + 11 + 11 \\ &= 11 \times 5 = 55. \end{aligned}$$

إذا كانت  $n$  عددًا فرديًا فإنه توجد صعوبة بسيطة. طبعًا من المستحيل كسر عدد فردي من الأشياء إلى أزواج. نفس الطريقة السابقة ستترك لنا عددًا واحدًا في الوسط يجب إضافته منفردًا. يمكن الدوران حول ذلك بحيلة صغيرة. نكتب فقط صفرًا في بداية العدد. هذا لن يغير الجواب لكنه سيعطينا عددًا زوجيًا من الحدود نجمعها معًا مرة أخرى وتسمح لنا بإعادة فكرتنا للاستخدام.

مثلاً لقيمة  $n = 11$  نعتبر:

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + \dots + 11 &= (0 + 11) + (1 + 10) + (2 + 9) \\ &\quad + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) \\ &= 11 \times 6 = 66. \end{aligned}$$

في الحالة العامة، للعدد  $n$  الفردي فالمعالجة تجري كما يلي:- ضع 0 قبل الجمع وكون الأزواج كما سبق. في هذه الحالة مجموع كل زوج هو  $n$  وعدد الأزواج هو  $(\frac{n+1}{2})$ . حيث إنه يوجد  $n + 1$  من الأعداد في المجموع الكلي لأن الصفر «0» أضيف في البداية. ويكون المجموع هو  $\frac{n(n+1)}{2}$  بالضبط كما في حالة  $n$  زوجية.

هذه الصيغة مهمة، لأنه بمجرد إيجادها أصبح سهلاً إيجاد صيغة لما يسمى المتسلسلة الحسابية. ولكن سننتظر حتى الفصل السابع قبل الكلام عن هذه النقطة مرة أخرى.

مسألتنا التالية سهلة لكن خادعة؛ ولهذا السبب فهي مسلية. تخيل أن لدينا كابل يمتد حول خط الاستواء للأرض (على اعتبار أنه دائرة)، ومن المقرر رفع الكابل حتى يكون بتمر واحد فوق سطح الأرض.

**٨- كم يجب أن يزداد طول الكابل حتى يكون على ارتفاع متر واحد عن الأرض؟**

دعنا نقترح أربعة احتمالات:

أ: 6 أمتار، ب: 6 كم، ج: 600 كم، د: 60,000 كم.

هل قمت بالتخمين؟ الإجابة الصحيحة هي: أ. مفاجأة! أليس كذلك، كيف وصلنا إلى هذه الإجابة؟ يبدو أننا بحاجة لمعلومات أكثر، وبالتأكيد لمعرفة محيط الكرة الأرضية من أجل حساب الإجابة. ربما وربما لا، دعنا نبدأ دون خوف، وباستخدام رمز للمجهول: ليكن  $r$  هو نصف قطر الأرض

### عشرة أسئلة وإجاباتها

ومن ثم يكون محيط الأرض  $2\pi r$  (حيث  $\pi$  هي النسبة التقريبية 3.14) أي أن الطول الأصلي للكابل هو  $2\pi r$ . عند رفع الكابل مترًا واحدًا أعلى السطح فإن الكابل يغطي دائرة نصف قطرها  $r + 1$  ويكون طوله أصبح  $2\pi(r + 1)$ . كل ما نريد معرفته الآن هو الفرق بين المحيطين، وعلى الأقل يمكن كتابة تعبير لهذا:

$$2\pi(r + 1) - 2\pi r.$$

بضرب الأقواس (وتذكر أنه لأي عدد  $a$  فإن  $a(r + 1) = ar + a$  وأن  $2\pi$  عدد) نحصل على:

$$2\pi r + 2\pi - 2\pi r = 2\pi,$$

وبالطبع  $2\pi$  أكبر قليلًا من 6، مما يوضح أن  $A$  هو الاختيار الأصح. إذا وجدت الإجابة مدهشة أم لا، حقيقة أننا نستطيع إجابة السؤال على كل حالة مدهشة نحن لم نحتاج إلى معرفة نصف قطر الأرض، وهذا له عواقب شديدة. فحيث إن الجواب لا يعتمد على قيمة  $r$ ، فهذا يعني أن الإجابة صحيحة لأي كرة، حتى لو كانت كرة السلة أو حتى كوكب المشتري.

الحقيقة أن فرضنا أن خط الاستواء دائرة تامة لم يكن له تأثير هام أو غير ذلك في نتيجتنا. محيط الدائرة سمح لنا بكتابة التعبير الدقيق  $2\pi r$  للمحيط. التغيير لشكل مختلف حتى لو كان غير منتظم تمامًا سوف يغير ثابت التناسب قليلًا، لكن عددًا صغيرًا مثل الإجابة أ سيظل ساريًا. الأهم من ذلك، أن عدم اعتماد الإجابة على حجم الشكل لا يزال صحيحًا. لأي شكلين متماثلين، مثلًا: دائرة وقطع ناقص، أو أشكال أقل انتظامًا، فإن الزيادة في طول الكابل لا تعتمد على حجم الكوكب في السؤال. (جرب بنفسك المسألة بأخذ كوكب مكعب، ستكتشف أنك تحتاج إلى زيادة طول الكابل بمقدار ثمانية أمتار.)

## ٩- كيف يقسم $n$ من الرجال زجاجة من الفودكا؟

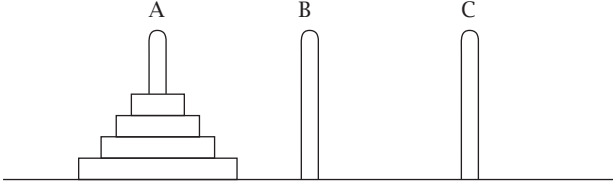
لقد أكد لي عدد من زملاء الروس أن هذه مشكلة في الواقع خطيرة جدًا. توجد زجاجة واحدة ليشترك فيها  $n$  من الشاربين، وكل منهم ينبغي أن يقتنع أنه أخذ حصة عادلة. كيف يمكن تحقيق هذا؟ مع اثنين، الأمر بسيط. على الشخص أن يصب في كأسين ويحكم بأنهما كميتان متساويتان تقريبًا من المشروب (الثلثين)، بمعنى أنه يكون سعيدًا بالحصول على أيهما. والثاني عليه اختيار أي الكأسين تكون له. وبهذا لا يشكي أي منهما.

إنها ليست عملية صعبة جدًا مع عدد أكبر من الشاربين أن نبتكر أسلوبًا عمليًا لأي عدد  $n$ . الأول أ يصب ما يدعي أنه حصة عادلة، فإذا فكر أي من الآخرين أنها حصة كبيرة فليأخذ واحد منهم — وليكن ب — كأس أ وينقصها إلى الكمية التي يراها صحيحة، (طبعًا بدون أن يشربها)، ومن المفترض ألا يعترض أحد إذا اعتقدوا أن أ راض بما يبدو أنه أقل من نصيبه.

إذا اعتقد أحدهم أن ب أخذ أكثر، فهذا الشارب يأخذ كأس ب ويصب الزيادة التي يظنها. وتستمر العملية. ومن الأهمية ملاحظة أنه عندما تمر الكأس من يد إلى يد، لا أحد من الأصحاب السابقين سوف يعترض على المستوى الحالي. فمثلاً أ لا يستطيع الشكوى من أن ب حصل على زيادة لأن ب له أقل مما حسبه A حصة عادلة. في كل خطوة يقل عدد المعارضين، حتى نصل إلى وضع حيث أحدهم وليكن X، يمسك الكأس التي يعتقد أنها تمثل حصة عادلة ولا أحد من الآخرين يميل إلى محاجاته (النقاش معه). السيد X سعيد الآن وينسحب من العملية ليأخذ شرابه، يكرر الباقي نفس العملية بكاملها، ولكن بشارب أقل والباقي من الفودكا حتى يحصل كل منهم على شرابه ويكون سعيدًا.

ومع أن كل واحد منهم ليس سعيدًا تمامًا، فإن هذا النظام الشامل، بصرف النظر عن صبر المشاركين، يخفق في ضمان ألا يحسد أحدهم الآخر على كأسه. فإنه صحيح ألا أحد يستطيع الادعاء أنه لم يحصل على حصة

## عشرة أسئلة وإجاباتها



شكل ٤

عادلة، ولكن واحدًا من الذين خرجوا مبكرًا من العملية (مثل السيد X الذي تقاعد مبكرًا) قد يكون مقتنعًا أن بعضًا ممن خرجوا لاحقًا حصلوا على أكثر من حصته؛ لأن الباقيين كانوا حمقى لدرجة تركه يحصل على ذلك.

الرياضيات المحتواة في هذا السؤال تكمن في أسلوب البرهان أكثر منها في المهارة في الحسابات. هذا المنهج، في تحويله حالة تحتوي على  $n$  إلى حالة تحتوي  $n - 1$  يطلق عليها الحجة الاستقرائية أو الاستنتاجية.

مسألتنا التالية تحل أيضًا بنفس الموديل خطوة بخطوة.

### ١٠- كم من الوقت يستغرق بناء برج هانوي<sup>٣</sup>؟

المسألة التقليدية لبرج هانوي تتكون من ثلاثة أوتاد A، B، C، مع برج مدرج من حلقات متحدة المركز موضوعة على الوتد الأول كما في الشكل ٤. الهدف هو نقل البرج من A إلى B، مع التقيد بالشرطين التاليين عن طريق تحريك الحلقات بين الأوتاد:

(أ) يمكنك تحريك حلقة واحدة في المرة الواحدة.

(ب) لا تضع حلقة أكبر فوق حلقة أصغر منها.

<sup>٣</sup> مدينة هانوي هي عاصمة دولة فيتنام.



جرب اللعبة ببرج صغير مكون من ثلاث قطع أو أربعة من النقود. سوف ترى فوراً كيف تم ذلك. عليك أن تجد أقل عدد من التحركات حتى تصل إلى الهدف (عدد  $n$  من الحلقات).

في الحالة العامة فإننا نحتاج إلى إيجاد أقل عدد من التحركات لإنجاز المطلوب.

الميزة الرياضية التي يجب اغتنامها هي «لكي تلعب المباراة ذات عدد الحلقات  $n$ ، عليك أولاً أن تلعب المباراة ذات عدد الحلقات  $(n-1)$ ». فمثلاً انظر إلى المباراة ذات الأربع حلقات والتي تمثل تمثيلاً تاماً الوضع العام. لن نستطيع تحريك الحلقة الكبيرة في الأسفل حتى تكون نقلت برجاً مكوناً من ثلاث حلقات إلى الوند التالي. أي يجب أن تلعب أولاً المباراة بثلاث حلقات. بعد ذلك يمكنك وضع الحلقة الكبيرة في المكان المطلوب بحيث لا تتحرك ثانية. لإتمام الطريقة عليك تحريك برج الثلاث حلقات وتضعها على الحلقة الكبيرة، أي أنك سوف تلعب مباراة الثلاث حلقات مرة أخرى.

فإذا كتبنا  $a_4$  لأقل عدد من التحركات لنقل البرج ذي الأربع حلقات وكتبنا  $a_3$  لأقل عدد من التحركات لنقل البرج الثلاثي الحلقات، فالحجة السابقة توضح أن:  $a_4 = a_3 + 1 + a_3$ ،  $a_4 = 1 + 2a_3$ . واضح أيضاً أن هذه الحجة صحيحة بدقة متناهية لأي مباراة ذات  $n$  حلقة وأنه لأي  $n = 2, 3, \dots$ :

$$a_n = 1 + 2a_{n-1},$$

حيث  $a_n$  ترمز إلى أقل عدد من التحركات المطلوبة للعبة بها  $n$  حلقة حتى تكتمل. حيث إنه من الواضح أن  $a_1 = 1$  (أي إننا نحتاج حركة واحدة للمباراة ذات الحلقة الواحدة) يمكن استخدام هذه الصيغة — واسمها التقني إعادة الحساب recursion — لحساب القيم المتتالية للعدد  $a_n$ . على سبيل المثال:  $a_2 = 1 + 2 \times 1 = 3$ ،  $a_3 = 1 + 2 \times 3 = 7$ ،  $a_4 = 1 + 2 \times 7 = 15, \dots$  وهنا قد حصلنا على متتابعة الأعداد التالية:

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots$$

## عشرة أسئلة وإجاباتها

هل ينشأ نمط؟ الإجابة: نعم. إذا بدأنا بالعدد 2 وضاعفناه أكثر من مرة فإننا نحصل على نفس المتتابعة تقريباً:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots$$

الحد النوني لهذه المتتابعة الأخيرة هو  $2^n$  ومن ثم فإن  $a_n$ ، أقل عدد من التحركات لبناء برج هانوي يعطي بالمعادلة:

$$a_n = 2^n - 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

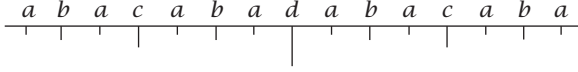
القصة المصاحبة لبرج هانوي (الذي يحتوي على 64 حلقة) أن الرهبان يمكنهم تحريك حلقة واحدة في اليوم وعندما يكملون مهمتهم ستحدث كارثة تعم الجميع. لا داعي للانزعاج بهذا الشأن. حتى لو كان عدد الحركات اليومية 100 في المباراة ذات 20 حلقة نحتاج تقريباً إلى 30 سنة. ومن ثم فإن مهمة الرهبان في المباراة ذات 64 حلقة ستأخذ بلايين من السنين.

برغم أن هذه ليست نهاية القصة في الرياضيات. يمكننا تعميم المسألة، ونسأل ماذا يحدث إذا كان هناك 4 أوتاد! أو حتى  $k$  من الأوتاد؟ ستكون المسألة مشابهة لكن أكثر تعقيداً. توجد رياضيات مختلفة إذا كنا مهتمين بالبحث عن المتتابعات الفعلية للتحركات وتشفيرها بطريقة طبيعية، كما أشار إلى ذلك كتاب مارتن جاردنر Martin Gardner مجموعة من الألغاز الرياضية وحلولها. فإذا قمنا بتسمية الأربع حلقات في ترتيب تصاعدي بالنسبة للحجم  $a, b, c, d$  ولعبنا مباراة الأربع حلقات وكتبنا اسم كل حلقة حركناها فسنحصل على المتتابعة

$$a, b, a, c, a, b, a, d, a, b, a, c, a, b, a.$$

هذا النوع من المتتابعات ينشأ في أماكن أخرى غير هذه المسألة. على سبيل المثال نأخذ المسطرة القديمة حيث البوصات مقسمة ثنائياً على أنصاف، أرباع وأثمان و  $\frac{1}{16}$  (شكل ٥):

## الرياضيات للفضوليين



شكل ٥

إذا قرأت من اليسار إلى اليمين حيث أقلهم  $\frac{1}{16}$  يقابل أصغر حلقة  $a$  و  $\frac{1}{8}$  يقابل الحلقة  $b$ ، وهكذا فإنك تقرأ نفس القائمة السابقة. ظاهرة رياضية مثل هذه في بعض الأحيان تمدنا بعامل مشترك في اثنين من الحالات الأخرى غير المرتبطة، والتي تكون دائماً مفتاحاً للفهم.

## الفصل الثاني

# الحقيقة حول الكسور

علماء الرياضيات ليسوا مولعين بالحاسبات كما قد تتوقع. الكمبيوتر والآلات الحاسبة اخترعها وطورها بالطبع علماء الرياضيات والمهندسون وهي مفيدة جداً، فلماذا نحن على الأحسن، منقسمون تجاهها؟ السبب أن الآلات الحاسبة لا تستخدم كثيراً عندما يتعلق الأمر بالمفاهيم الأساسية (المسار والصامولة) للحساب ويمكن أن تحل محل التفكير بدلاً من الحفز عليه.

استعمال الآلات الحاسبة على نطاق واسع في دروس الرياضيات يمكن أن يقوض العملية التعليمية. هذه الحقيقة معترف بها الآن في التعليم واستخدامها العشوائي قد تقلص.

الأثر المؤسف الآخر لاستخدام الآلة الحاسبة هو أنها تجعل الموضوع مملاً. الرياضيات في المدارس الثانوية تقلصت إلى سلسلة من ضغط الأزرار، مما شجع الطلاب على نسيان الرياضيات أو على الأقل الابتعاد عنها. هذا التفكير التحفيزي يشبه العمل في خزانة السوبر ماركت. طريقة العمل اليدوي جيدة ما دامت لا تؤدي إلى عقول مغلقة. عادة، الطالب المستخدم للآلة الحاسبة يكتب قليلاً أو لا شيء على الإطلاق وتأثيرها أن تجعله عاجزاً عن التعبير رياضياً وغير قادر على حل مسألة تحتاج إلى أكثر من خطوة واحدة.

ومع ذلك ففي هذا الفصل، أمل في اكتشاف المزايا التي توجد في استخدام الآلات الحاسبة. وبفعل ذلك سوف نقابل أغرب فكرة في هذا الكتاب وتسمى المجموعة غير القابلة للعد. غرابتها تكمن في كونها أبعد

عن العالم الواقعي، بالرغم من أن نقطة البداية ستكون سلسلة مألوفة من الأرقام على شاشة عرض الآلة الحاسبة.

الآلات الحاسبة سمحت للناس أن يصبحوا أكثر راحة مع عروض الكسور العشرية، وربما لدى غير مرغوب، وكثيراً ما يفضل تقريب سيئ للكسر العشري على كسر بسيط ودقيق. على سبيل المثال، كم مرة نرى 66.7% بدلاً من القيمة الدقيقة  $\frac{2}{3}$ ؟

### لماذا من الأحسن أن نستطيع أن نقوم بالحساب؟

الحساب العادي صعب جداً. استغرقت البشرية آلاف السنين لتتقنه. الفهم الكامل لحساب الكسور استغرق جهداً لتحصيله. الجوانب الأساسية للكسور كانت ما تزال تكتشف في القرن التاسع عشر. ما تسمى متسلسلة فيري النونية  $n$ th Farey Series هي ببساطة قائمة بجميع الكسور بين صفر وواحد حيث مقاماتها لا تزيد على  $n$  مكتوبة بترتيب تصاعدي، فمثلاً متسلسلة فيري الخامسة هي المتسلسلة:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

متسلسلات فيري مليئة بالخواص الجبرية الأنيقة وحتى الهندسية ومكتشفها عالم رياضيات من الهواة. لابد أن عجز علماء الرياضيات على مر العصور عن إدراك هذا الجانب المثير والأساسي لعلم الرياضيات كان بمنزلة صدمة لعباقرة العصر، مع أنه يبدو أن السمات الأساسية لمتوالية فيري نشرت أول ما نشرت عام ١٨٠٢م على يد هاروس Haros الذي سبق نشر فيري لها بنحو أربعة عشر عاماً.

نعود لما بدأنا، لقد سمعنا الأطفال الذين يحاولون إجراء الجمع (ربما ذلك ليس بالجهد الكافي)، وهم يقولون:

«لماذا أنا بحاجة لتعلم هذا؟ إذا أنا رغبت فقط معرفة هذا الجواب  
أستطيع استخدام آليتي الحاسبة.»

هذا النوع من الأسئلة كثيراً ما يولد الإحباط، والذين يسألونه لن يرحبوا بإجابة مستفيضة. عدم القدرة على التعامل مع الأعداد يمكن أن يكون مشكلة ثابتة. إذا كنا لا نستطيع إجراء عمليات الجمع فنحن مضطرون للغوص لنختفي كلما ظهرت أشياء عديده. حتى حلول الآلات الحاسبة لن تساعد كثيراً الشخص الجاهل في الرياضيات الذي لا يستطيع الشعور بثقة أنه استخدم الآلة بطريقة صحيحة، وهذا أكثر قليلاً من استخدام القاموس لشخص لا يعرف القراءة.

التعامل مع الأعداد العادية وأسئلة القياسات يتطلب تدريباً إلى المستوى الذي هو على الأرجح يتجاوز ما أنت في حاجة إليه في الممارسة. وهذا لأن المشاكل التي تقابلها يجب أن تكون مفهومة جيداً لك حتى تستطيع أن تتعامل معها بثقة في الأحوال العملية.

هل نحن بحاجة لمعرفة الجداول؟ نعم، وسوف أشرح لماذا. المعرفة بنظام الأعداد وتعلم توليد الدوال في حد ذاته جدير بالاهتمام، لكن هناك جانباً رياضياً أساسياً للوضع كذلك. النقطة التي نقدرها هي أن جداول الضرب لا تمثل مجموعة من البيانات العشوائية مثل قائمة أرقام التليفونات لكن أقل مجموعة من حواصل الضرب التي نحتاج معرفتها لكي نقوم بالحساب العادي.

دعونا ننظر إلى شيء أكثر أهمية: الجمع. حتى نتمكن من إجراء عمليات الجمع نحتاج إلى معرفة جداول الجمع حتى 10، مثلاً لجمع العددين  $17 + 59$  يجب معرفة ما هو  $7 + 9$  وبنفس الطريقة يجب أن نتذكر جداول الضرب حتى 10 حتى نتعلم كيف نضرب عددين معاً.

(بالمناسبة العددين  $a + b$ ،  $a \times b$  يعرفان بأنهما مجموع  $a$ ،  $b$  وحاصل ضربهما، على الترتيب، العدد  $\frac{a}{b}$  يسمى خارج قسمة  $a$  على  $b$ .) إذا لم نعرف هذا الجمع والضرب عن ظهر قلب، فإننا سنضطر إلى إعادة تعلمهما في كل مرة.

لماذا هذه المجموعة الخاصة من الحقائق ضرورية لكي نقوم بالحساب؟ من المؤكد أن هناك بعض العشوائية، لكنها قدمت فعلاً عند بداية تطور

الحساب عندما قررنا استخدام الأساس 10. وكان هذا الاختيار بمحض إرادتنا، لكننا الآن ندفع مقابل ذلك من خلال الحاجة إلى تعلم جداول الجمع والضرب إلى 10 — لو كنا قررنا اختيار النظام الثنائي، لكان لدينا فقط الجمع والضرب التافه لنحفظها.

جرى العرف على دراسة جداول الضرب حتى 12؛ وهذا لأن كثيراً من نظم القياس لها الأساس 12 (الجنيه، الشلن، بنس، قدم، بوصة ... إلخ)، ولأن حاصل الضرب حتى  $12 \times 12$  تظهر كثيراً جداً فيجدر إضافتها إلى الذاكرة. ما زالوا كذلك بالرغم من أن الحجة لعمل ذلك أصبحت أقل إلزاماً. من أجل فهم الأعداد إلى مدى مفيد، على التلميذ إجراء الكثير من الحساب. ليست الإجابة هي الشيء الهام، لكن تطور المهارة المطلوبة للحصول عليها. القيام بالعمليات الحسابية يغرس التآلف الأساسي مع الأعداد والثقة في معالجتها. كل الرياضيات العالية تنطوي على نفس النوع من التعامل، الأداء برموز جبرية بدلاً من أعداد خاصة، ومن ثم يحتاج الطالب إلى ترسيخ أقدامه تماماً في الحساب حتى يكون هذا التعامل هو طبيعته الثانية.

عدم إتقان الأساسيات يترك عقبة لكل المفاهيم المستقبلية للمواد الجديدة. على الخصوص، يجب أن نكون قادرين على التعامل مع الكسور لكي يكون لنا إمكانيات رياضية حقيقية.

هذا الكتاب ليس مقررًا لتجديد المعلومات لهذه الأشياء، لكن سأنتهز هذه الفرصة لأقول شيئاً عن الموضوع. ينبغي لك أن تكون مرتاحاً مع حساب الكسور، وأود أن أدعوك لقراءة باقي هذا الفصل — قراءة الأشياء التي يعلمها الشخص سابقاً تكون ممتعة تماماً وما زلت أمل أن أقدم لك مفاجأة أو اثنتين.

حساب الكسور يتطلب فكرة واضحة عن تساوي الكسور. إذا تصورت كعكة قسمت إلى نصفين ثم إلى أرباع، فسترى أنه على الرغم من أن مفهوم  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{2}{4}$  مختلفان فإنهما يمثلان أجزاءً متساوية من الكعكة.

الكسور  $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots$  وهكذا متكافئة. سنقول أنها متساوية، بالرغم من أن هذا غير دقيق إلا إذا شرحنا: أي أن  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{2}{4}$  كسور مختلفة، لكنها

متساوية لأنها تمثل مقادير متساوية. الجانب الأحسن الآخر لهذا الوضع هو على الرغم من وجود أي عدد من الكسور المساوية لكسر معين، فإن واحدًا فقط منها هو الكسر المختصر، هذا يعني أنه اختُصر لأقل عدد أعلى علامة الكسر ويسمى البسط، وأقل عدد أسفل علامة الكسر ويسمى المقام، وليس بينهما أي عامل مشترك غير الواحد، على سبيل المثال الكسور  $\frac{6}{15}$ ،  $\frac{12}{30}$  كل منهما يُختصر إلى  $\frac{2}{5}$  أي أن  $\frac{2}{5}$  هي الصورة المختصرة للكسرين. ومن المؤكد أن الصورة المختصرة أكثر شهرة وهي الأبسط، لأنها تحوي أصغر بسط ومقام من بين جميع الصور الباقية.

التساوي بين الكسور يمكن التعبير عنه خلال الضرب التقاطعي أي ضرب الوسيطين في الطرفين:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

(السهم مزدوج الرأس يقرأ: مكافئ، والسهم برأس واحدة يقرأ: يؤدي إلى.)  
بشكل أعم يمكننا اختبار ما إذا كان الكسر الموجب أقل أم يساوي كسرًا آخر باستخدام الضرب التقاطعي:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc.$$

(للتذكرة، رموز عدم التساوي  $\leq$  أقل من أو تساوي دائمًا تشير إلى العدد الأصغر في العددين). القاعدة في مقارنة الكسور صحيحة أيضًا إذا استبدلنا  $\leq$  بأي واحدة من  $<$ ، أو  $>$ ، أو  $\geq$ . القاعدة صحيحة لأن المتباينات تظل كما هي إذا ضرب طرفا المتباينة بأعداد موجبة ويمكننا المرور من المتباينة الأولى في أعلى إلى المتباينة الثانية بضرب طرفي المتباينة في العدد  $bd$ . مثال:

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow 14 < 15.$$

نحن الآن في وضع يمكننا إعطاء قاعدة عامة لجمع الكسرين أو طرحهما  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$ . أولاً نعوض عن الكسور بكسرين متساويين لهما مقام مشترك.



المقام المشترك يمكن إيجادَه بضرب المقامين معًا فنحصل على  $bd$ . لأن  
 $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$  فنحصل على:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}. \quad (1)$$

الإشارة  $\pm$  تعني زائد أو ناقص، وتستخدم لضرب عصفورين بحجر واحد.  
 هذه القاعدة صحيحة دائمًا لكن الإجابة الناتجة قد لا تختصر بالرغم من  
 أن الكسرين الأصليين يمكن اختصارهما. مثال:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{1 \times 9 + 2 \times 6}{6 \times 9} = \frac{9 + 12}{54} = \frac{21}{54} = \frac{7}{18}.$$

من المستحسن وجود قاعدة مثل (1) التي تعطي الإجابة في كل مرة.  
 لكنّ هناك مأخذًا على ذلك. في الأساس، (1) تحتوي جميع المعلومات التي  
 تحتاجها لإضافة وطرح الكسور، لكنها قد تثير ملل شخص ما غير معتاد  
 على الموضوع حيث لم يفهم الفكرة الأساسية للعملية.

يمكن اعتبارها ملخصًا لما يحدث. ثانيًا: القاعدة لا تمثل دائمًا أحسن  
 الطرق للحصول على مجموع معين. بالتدريب، يكون الأفضل البحث عن  
 أقل مقام مشترك. أي مضاعف للعدد  $b$  والعدد  $d$ . حاصل الضرب  $bd$  هو  
 مضاعف للعددين  $b, d$  لكنه ليس بالضرورة أقل واحد. على العموم هذا  
 المضاعف الأصغر نحصل عليه من العلاقة  $\frac{bd}{h}$  حيث  $h$  هو القاسم المشترك  
 الأكبر لكل من  $b, d$ ، وسوف نقدم المزيد عن هذا في الفصل الرابع. في مثالنا  
 السابق قيمة  $h$  هي 3، ومن ثم أصغر مقام مشترك هو  $18 = 6 \times 3 = \frac{(6 \times 9)}{3}$ .  
 ومن ثم:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} = \frac{7}{18}.$$

ضرب الكسور أسهل من جمعها، ببساطة نضرب كلا البسطين وكلا المقامين.  
 مرة أخرى الجواب الذي نحصل عليه قد لا يختصر:

$$\frac{5}{12} \times \frac{9}{10} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$

من المهم أن يكون ذهن حاضرا للبحث عن عوامل قبل القيام بعملية الضرب، لأن من الممكن الحذف بسهولة

$$\frac{5^1}{12^4} \times \frac{9^3}{10^2} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}.$$

توجد وجهة نظر عامة يجب عرضها هنا، ويأخذ طلاب الرياضيات وقتاً طويلاً لاستيعابها. وهي أنه من الأسهل الاختصار في الكسر  $\frac{45}{120}$  عند كتابته كحاصل ضرب  $\frac{5}{12} \times \frac{9}{10}$ . إن إجراء الحساب على عدد ما، أو الجبر على تعبير جبري، قبل إجراء عملية الضرب؛ أبسط من إجرائه بعدما تحصل على نتيجة الضرب.

للأسف، الطالب الحريص على الإجابة غالباً ما يتجاهل ذلك، ويقوم بعمليات ضرب غير ضرورية مما يؤدي إلى نتائج عكسية. مع وجود الآلة الحاسبة في متناول اليد أخشى إن الإغراء لا يقاوم. عند الحصول على الإجابة الصحيحة، نادراً ما يكون ذهن الطالب حاضراً ليحلل ما فعل ويحذف الخطوات غير المطلوبة. هنا يمكن للمعلم الجيد مساعدته.

مباشرة يمكن رؤية أن قاعدتنا لضرب الكسور لها معنى. إذا قسمت كعكة إلى  $b$  من الشرائح المتساوية وكل منها قسم أيضاً إلى  $d$  من الأجزاء المتساوية فإننا قسمنا الكعكة إلى  $bd$  من القطع المتساوية أي أن:

$$\frac{1}{b} \times \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}.$$

فإذا ضربنا هذا في البسطين  $a$  و  $c$  نحصل على القاعدة العامة:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

أخيراً، لتقسيم الكعكة على  $n$  بمعنى أخذ  $\frac{1}{n}$  منها. وعموماً، للقسمة على  $\frac{a}{b}$  نضرب المقدار في المعكوس  $\frac{b}{a}$ . وخلاصة القول:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

هذا فعلاً يجعل عملية القسمة عكس الضرب، لأنه إذا ضربنا في  $\frac{a}{b}$  ثم قسمنا عليها، فإن حاصل ضرب العمليتين هو الضرب في  $\frac{ab}{ba} = 1$ .  $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$   
ومع ذلك فإن قسمة الكسور غالباً ما تعتبر لغزاً. هذا لا يعني أن الناس لا يستطيعون الجمع، كل ما في الأمر أن قاعدة «عكس الكسر الثاني ثم قم بعملية الضرب» ما زالت غامضة. أفضل طريقة لجعل العملية مقنعة هو أن تقوم بالقسمة مباشرة وتلاحظ أن الأثر الصافي لما قمت به هو ما تم وصفه بالقاعدة السابقة.

مثال: ما هو الناتج من  $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$ ؟ بتطبيق القاعدة

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}.$$

لنخلص أنفسنا من المقام في الكسر الأسفل وذلك بضرب كل كسر في 4: تأثير هذه العملية هو الضرب في  $1 = \frac{4}{4}$  ومن ثم قيمة الكسر لا تتغير:

$$\left(\frac{2}{3} \times 4\right) \div \left(\frac{3}{4} \times 4\right) = \left(\frac{2}{3} \times 4\right) \div 3 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

أي أن القسمة على  $\frac{3}{4}$  هو نفسه الضرب  $\frac{4}{3}$ .

استخدامات الكسور يمكن رؤيتها في سجلات قدماء المصريين الذين استخدموا وحدة الكسور Unit Fraction مثل  $\frac{1}{5}$  و  $\frac{1}{20}$  بحرية، لكنهم ترموا من النظر إلى الكسور مثل  $\frac{2}{7}$  كما لو كانت في نفس الوضع بالرغم من أن الكسر  $\frac{2}{3}$  كان له رمز خاص.

إنهم عبروا مثلاً عن  $\frac{2}{7}$  بالمجموع  $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$  (ما يبدو لنا أنه طريقة أخرى هو  $\frac{1}{7} + \frac{1}{7}$  التي لم تستعطفهم).

هذه على أية حال قادت إلى مشكلة حقيقية: هل من الممكن كتابة أي كسر فعلي يقع بين 0 و 1 على شكل مجموع وحدة كسور مختلفة؟  
الإجابة نعم، وإحدى طرق الحصول عليه سوف تقدم لك فرصة تنظيف قدراتك الحسابية. ابدأ من الكسر المعطى،  $\frac{m}{n}$ ، وا طرح أكبر وحدة كسور ممكنة. افعل نفس الشيء للباقي واستمر في تكرار العملية.

سوف يؤدي هذا إلى التحليل المطلوب. مثلاً نأخذ الكسر  $\frac{9}{20}$ . بطرح  $\frac{1}{3}$  نحصل على الباقي  $\frac{7}{60}$  ثم نطرح من هذا الباقي  $\frac{1}{9}$  سوف نحصل على  $\frac{1}{180}$  وبذلك نحصل على التحليل المصري:

$$\frac{9}{20} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{180}.$$

هذا النهج الجشع لطرح أكبر معكوس متاح فعلاً يؤدي إلى النتائج، لكن قد لا يؤدي دائماً إلى أقصر متتابعة من كسور الوحدة الممكنة كما نرى في هذا المثال لأن:  $\frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ .

جرب بنفسك الطريقة على الكسور  $\frac{5}{7}$  و  $\frac{6}{13}$  — سوف يمكنك كتابة كل منها كمجموع لثلاثة من كسور الوحدة.

مجموعة كاملة من الأسئلة تطرحها هذه المشكلة القديمة، كثير منها ما زالت تصارع علماء الرياضيات حتى اليوم. أبسط واحد منها هو: كيف نجد أكبر معكوس أصغر من كسر معين؟ سوف نجيب عن هذا في الفصل الخامس مع السؤال الأساسي: كيف نعرف أن هذه الطريقة صالحة؟ حتى تتوقف هذه العملية يجب الوصول إلى مرحلة حيث الباقي نفسه هو كسر وحدة. من المتصور أن هذا قد لا يحدث أبداً، ونستمر في طرح المعكوسات إلى الأبد. الباقي يؤكد أن الحالة ليست كذلك وسوف نرى في الفصل الخامس أن الكسر الفعلي  $\frac{m}{n}$  يمكن كتابته دائماً كمجموع  $m$  أو أقل من كسور الوحدة المختلفة.

### ماذا يحدث في حساب الكسور العشرية؟

التعبيرات المحتوية على عدد من الكسور مختلفة المقامات مزعجة. يمكننا التعامل مع كثرة المقامات بإيجاد المقام المشترك لكل الكسور. وهذا يسمح لنا بالتعامل مع أي مشكلة خاصة، لكن من اللطيف أن يكون هناك مقام واحد مشترك لجميع الكسور. بالتأكيد لا يوجد. يمكننا احتواء هذه الصعوبة باللجوء إلى الكسور العشرية. هذا يمكننا من عرض كل الكسور بطريقة

موحدة. على أية حال، الثمن الذي ندفعه هو أن تمثيلنا للكسور — حتى البسيطة جدًا منها — بصفة عامة يصبح غير محدود.

الجميع تقريبًا يعلم أن  $0.33333... = \frac{1}{3}$  الطرف الأيسر لهذه المعادلة يمثل فكرة بسيطة: إنه كسر عادي، بينما الطرف الأيمن يحتوي على عملية لانهائية — أي عملية تستمر إلى الأبد. إذا لم يزعجك هذا اضرب طرفي المعادلة في 3 فتحصل على:  $1 = 0.99999...$

لا يوجد خطأ هنا، لكنني وجدت الناس لا تحب هذا المظهر وفورًا يبدؤون في الاحتجاج، ويصرّون على أن الطرف الأيمن أقل بطريقة ما من الواحد. فأسأل: أقل بكم؟ الإجابة عن هذا السؤال المزعج تكون أحيانًا باقتراح أن  $0.99999...$  تمثل العدد الذي يسبق العدد 1، ولكن القيمتين ينفصلان فقط بمسافة متناهية في الصغر. هذا كلام علمي بدرجة كبيرة. لكن لا يوجد مثل هذا العدد — لا يوجد عدد يسبق مباشرة الواحد. بيد أننا في مواجهة شيء أنت قد تكون لم تلاحظه من قبل — أن العدد يمكن كتابته ككسر عشري في صورتين مختلفتين. غير أن هذا قليل الإزعاج ويوجد نوع واحد فقط من الاستثناء هو أن الكسر العشري مثل 2.364 هو نفسه يساوي العدد العشري  $2.36399999...$  أيضًا.

هذا يدعونا إلى دراسة الصلة بين الكسور الاعتيادية وتمثيلها العشري. حتى إشعار آخر، نحن نعتد فقط بالأعداد الموجبة، واستخدام الأعداد السالبة مهم طبعًا وسوف نتكلم عنها لاحقًا، لكن ليس لها أي مساهمة في مشكلة التمثيل العشري، ومن ثم لا يعنينا أمرها في الوقت الحالي.

يوجد نوعان من الكسور الاعتيادية: الحقيقية وغير الحقيقية. الكسر الحقيقي هو الكسر حيث البسط أصغر من المقام مثلًا:  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{8}{17}$  ... إلخ.

كل هذه الكسور تمثل أعدادًا بين الصفر والواحد. الكسر الذي بسطه أكبر من مقامه، مثل  $\frac{25}{12}$  يسمى كسرًا غير حقيقي. في مثل هذه الحالة بقسمة البسط على المقام يمكننا التعبير عن الكسر كعدد مركب هو في هذه الحالة  $2\frac{1}{12}$ ، وهو يتكون من عدد صحيح يتبعه كسر حقيقي. شكل العدد المركب للكسر مزيج عند استخدامه في الحسابات ومن ثم فإنه يفضل استخدام

التمثيل غير الحقيقي للكسر. ومع ذلك غالبًا ما يكون من الأفضل كتابة الإجابة النهائية لمجموع ما كعدد مركب لأنه يوضح قيمته، فمثلاً كتابة  $\frac{47}{7}$  على الصورة  $6\frac{5}{7}$  تخبرك بمجرد النظر أنك تتعامل مع مقدار بين 6 و7.

إذا فهمنا كل شيء حول التمثيل العشري للأعداد بين 0 و1، سوف نفهم التمثيل العشري العام، لذلك دعونا نركز على الفترة من 0 إلى 1. العدد القياسي هو العدد الذي يمكن كتابته على شكل كسر أو كما نقول أحياناً كنسبة بين عددين صحيحين. كما نعلم، أنه يمكن أن يمثل الكسران المختلفان نفس العدد،  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{2}{4}$  مثلاً. مرة أخرى حصلنا على نفس العدد بطريقتين مختلفتين، ومن ثم، في حالة التمثيل العشري لا نقابل هذا النوع من الإزعاج. باختصار كل من البسط والمقام إلى أبسط صورة يمكن كتابة العدد القياسي في صورة كسر على الصورة  $\frac{a}{b}$ ، حيث  $a$  و  $b$  ليس بينهما عامل مشترك غير الواحد. وبذلك يمكننا التفكير في الأعداد القياسية كأنها مجموعة جميع الكسور التي نحصل عليها بالطريقة السابقة.

ماذا يحدث عندما نكتب العدد القياسي في صورة كسر عشري؟ الإجابة هي أننا نحصل دائماً على عدد عشري متكرر، أي عدد عشري حيث توجد كتلة الأرقام المتكررة إلى ما لا نهاية بعد نقطة معينة في المفكوك. ونشير إلى ذلك بوضع نقطة فوق أول وآخر رقم من الكتلة، إليك بعض الأمثلة:

$$\frac{2}{3} = 0.666\dots = 0.\dot{6}, \quad \frac{1}{7} = 0.142857142857\dots = 0.1\dot{4}285\dot{7},$$

$$\frac{1}{24} = 0.041666\dots = 0.041\dot{6}, \quad \frac{1}{17} = 0.\dot{0}58823529411764\dot{7}.$$

قد تعتقد أنني قد نسيت بعض أصدقائك القدامى مثل  $\frac{1}{2} = 0.5$  و  $\frac{3}{8} = 0.375$ ، وهي الكسور العشرية المنتهية، وهذا ليس حقيقياً: الكسور العشرية المنتهية مثل تلك هي فقط مجرد حالات خاصة للتكرار، وأعني أن  $\frac{1}{2} = 0.5\dot{0}$  و  $\frac{3}{8} = 0.375\dot{0}$  ولكن بالطبع لا توجد حاجة لكتابة التكرار في هذه الحالة.

هناك العديد من الأسئلة التي يتعين الإجابة عنها:

- (١) لماذا تؤدي الأعداد القياسية إلى تكرارات عشرية كما ادعيت الآن؟
- (٢) أي الأعداد القياسية تؤدي إلى كسر عشري منتهٍ؟
- (٣) ماذا يمكن أن يقال عن طول كتلة التكرار في المفكوك العشري؟
- (٤) في الأمثلة الأربعة السابقة أطوال كتلة التكرار كانت على الترتيب 1 و 6 و 1 و 16 يمكن تحويل كل عدد عشري متكرر إلى كسر؟ وإذا كان فكيف؟

لمعرفة لماذا تؤدي الكسور إلى عدد عشري متكرر، من الأفضل النظر مرة أخرى إلى الطريقة التي تعلمتها لتحويل كسر مثل  $\frac{5}{6}$  إلى عدد عشري:

$$\frac{5}{6} = 0.8333 \dots = 0.8\dot{3}.$$

الطريقة التي تعلمتها لفعل ذلك هي:

- (١) 6 أكبر من 5، لذلك نكتب 0. (للاشارة إلى أن الكسر أقل من واحد) ومعنا 5.
- (٢) 6 موجودة في 50 ثمان مرات والباقي 2 فنكتب 8 ونحتفظ بـ 2

ما حدث هنا إننا عالجنا 5 وكأنها  $50 \times \frac{1}{10}$ ، فبقسمة 50 على 6 يكون هناك 8 (ويعني  $\frac{8}{10}$  بالطبع) والباقي 2 وتمثل بـ  $\frac{2}{10}$ ، وما زال يمكن قسمة  $\frac{2}{10}$  مرة أخرى على 6 باعتبارها  $20 \times \frac{1}{100}$  في الخطوة التالية من القسمة.

- (٣) 6 موجودة في 20 ثلاث مرات والباقي 2 فنكتب 3 ونحمل 2.

في هذه المرحلة أثبتنا أن  $\frac{5}{6} = 0.83 + (\frac{2}{100} \div 6)$ ، ونستمر في العمل على هذا الباقي بنفس الطريقة. طبعاً في هذه الحالة، لن يكون الباقي أبداً صفراً ومن ثم فإن العملية تستمر إلى الأبد. على أية حال لأن كل البواقي

تساوي 2 من هذه النقطة فصاعدًا، ولأنه كتب علينا تكرار هذا الحساب البسيط مرات عديدة، فنحصل على:

$$\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}.$$

يمكننا الآن إجابة سؤالنا الأول. عند تحويل الكسر  $\frac{m}{n}$  إلى عشري، قد يكون كسرًا عشريًا منتهيًا أو لا.

إذا لم يكن منتهيًا، فإن الباقي بعد كل مرحلة في القسمة يجب أن يكون أحد الأعداد  $1, 2, \dots, n-1$ . وبما أن هناك  $n-1$  من الاحتمالات فقط فإن الباقي يجب أن يتكرر في مكان ما من الخطوات  $n$  الأولى. إلى أن يظهر الباقي للمرة الثانية فإننا مجبرون على تكرار نفس الدورة من البواقي التي لدينا بالضبط. هذه الدورة، طبعًا تنتهي بنفس الباقي الذي تكرر للمرة الثانية ونكون قد وقعنا في هذه الحلقة إلى الأبد.

فمثلاً  $\frac{1}{7}$  هو كسر عشري غير منتهٍ. البواقي الممكنة التي نقابلها عند إجراء القسمة هي الأعداد 1 إلى 6 وبالطبع تظهر جميعها. عند قسمة 1 على 7، دورة البواقي هي:  $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, \dots$  وهكذا ويتضح أن كتلة التكرار وهي 6.

هذا يجيب عن السؤال الأول وأيضًا جزء من الطريق لإجابة السؤال الثالث: ما طول كتلة التكرار؟ إذا كان المقام هو  $n$ ، فإن طول كتلة التكرار سيكون على الأكثر  $n-1$ . هذا الطول الأقصى الممكن يظهر في بعض الأحيان — الكسور التي مقامها 7 أو 17 طول كتلة الكتلة هو (التكرار هي على الترتيب 6 أو 16 كما رأينا فعلًا. قانون مورفي لا ينطبق، على كل حال، في هذه الأحوال الوضع ليس دائمًا سيئًا، حتى لو كان المقام عددًا أوليًا:  $0.0\dot{9} = \frac{1}{11}$  وهي كتلة طولها فقط 2 وكذلك  $0.07692\dot{3} = \frac{1}{13}$ ، وهي كتلة طولها 6 فقط. هناك الكثير عن الطول الكتلة  $r$  لكتلة التمثيل العشري للكسر  $\frac{m}{n}$ . مادامت  $m$  و  $n$  ليس بينهما عامل مشترك فإن  $r$  تعتمد على  $n$  وليس على  $m$ . قيمة  $r$  نفسها يمكن وصفها بطرق أخرى، ولكنها ليست



مريحة كما كنت تتمنى. لا يوجد قانون عام سريع لإيجاد  $r$  من قيمة  $n$ .

من الناحية الأخرى، السؤال الثاني لمعرفة أي الكسور التي تؤدي إلى كسور عشرية منتهية، هو أكثر سهولة في التعامل؟ نحن نعلم أن  $\frac{1}{2} = 0.5$  و  $\frac{1}{5} = 0.2$ ، وأن 2 و 5 عوامل للعدد 10، وهو أساس نظامنا العددي. فإذا أخذنا عددين عشريين منتهيين يمكننا ضربهما معاً، والنتيجة ستكون كسراً عشرياً منتهياً آخر.

سوف نتذكر إذا كان العدد الأول له  $r$  والعدد الثاني له  $s$  فإن حاصل الضرب لن يكون له أكثر من  $r + s$  من الأماكن العشرية فمثلاً  $0.00352288 = 0.01744 \times 0.202$  وأن الناتج ينتهي بثمان أماكن عشرية لأن  $8 = 5 + 3 = r + s$ ، و يترتب على ذلك أن أي عدد حاصل ضرب  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{5}$  سيكون له تمثيل عشري منتهٍ فمثلاً:

$$40 = 2^3 \times 5, \quad \frac{1}{40} = 0.025, \quad 16 = 2^4, \quad \frac{1}{16} = 0.0625.$$

إليك ما هو أكثر: أي مضاعف لكسر عشري منتهٍ سيكون أيضاً منتهياً، فمثلاً  $\frac{7}{40} = 0.175$ ، السبب في ذلك أن ضرب الكسر العشري المنتهي بعدد صحيح لن يزيد عدد العناصر غير الصفرية بعد النقطة العشرية (بالرغم من أنه قد ينقصها، مثلاً:  $0.5 \times 2 = 0.25$ ). من الأبسط أن نثبت أيضاً أن العكس صحيح: الكسر العشري المنتهي يمكن كتابته على صورة كسر، حيث المقام هو حاصل ضرب  $2s \times 5s$ ، لأن أي كسر عشري منتهٍ يكتب فوراً على صورة كسر مقامه قوى العدد 10، مثلاً:

$$0.255 = \frac{255}{1000} = \frac{51}{200}.$$

في هذا المثال المقام هو:

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^3.$$

طبعًا من الممكن اختصار الكسر كما حدث هنا، لكن المقام يظل حاصل ضرب الأعداد 2، 5 ( $200 = 2^3 \times 5^2$ ). وصلنا إلى وصف كامل للكسور التي تعطي كسورًا عشرية منتهية.

الكسر  $\frac{m}{n}$  له تمثيل عشري، إذا وفقط إذا، كانت  $n$  على الصورة  $n = 2^a 5^b$ ، أي أن، إذا وفقط إذا، كان مقام الكسر هو حاصل ضرب 2s، 5s. (هذا يحتوي أيضًا المقامات على صورة 2s فقط أو 5s فقط مثل  $\frac{1}{16}$  أو  $\frac{1}{25}$ ).

الأعداد 2 و 5 هي أعداد خاصة لأنها عوامل للعدد 10، حيث هي أساس نظام الأعداد الذي نستخدمه. إذا كنا سوف نغير الأساس فإن فصل الكسور العشرية المنتهية سوف يتغير أيضًا معه، فمثلًا: في حالة الأساس 3 (معروف باسم الثلاثية) فالكسر  $\frac{1}{3}$  كسر منتهٍ في الثلاثية وتمثيله هو 0.1 حيث 1 تعني  $1 \times \frac{1}{3}$  وليس  $1 \times \frac{1}{10}$ .

نعود الآن إلى السؤال الرابع، سوف أوضح كيف نغير أي كسر عشري متكرر إلى كسر عادي. هذه التقنية الخاصة يبدو أنها لا تُعلم دائمًا في المدارس، وهذا من المخجل حيث إنها طريقة بسيطة وأيضًا ذكية، بعض الأمثلة ستكون كافية لتوضيح الطريقة.

دعنا نجرب  $0.\dot{6}3$  طول الكتلة  $r$  هو 2، ومن ثم نضرب العدد، ولنرمز له بـ  $a$ ، في  $10^2 = 100$ . الآن  $0.\dot{6}3 = 0.63\dot{6}3$  ومن ثم هذا يؤدي إلى  $100a = 63.\dot{6}3$ . الفكرة هنا أن هذا العدد الجديد له بالضبط نفس المفكوك بعد العلامة العشرية للعدد  $a$ . هذا يثبت أن  $100a = 63 + a$  بطرح  $a$  من الطرفين نحصل على  $99a = 63$  أي أن:  $a = \frac{63}{99}$  وفي النهاية بعد الاختصار

$$0.\dot{6}3 = \frac{7}{11}.$$

من الأفضل أن تجرب بعضًا من هذا بنفسك. استخدم نفس التقنية لاختبار أن  $0.0\dot{3}7 = \frac{1}{27}$ ،  $0.1\dot{8} = \frac{2}{11}$  (نحتاج هنا للضرب في 1000).

تغيير بسيط يظهر عندما نأخذ مثال  $a = 0.2\dot{7}$ . وفي هذه الحالة  $r = 1$  ومن ثم يحتاج الضرب في 10 فقط لنحصل على  $10a = 2.7$ ، بالطرح نحصل على  $9a = 2.7 - 0.2\dot{7}$ .

هذه المرة العددين متساويان بعد المكان الثاني في العلامة العشرية، ومن ثم هذه الأجزاء يحذف بعضها بعضاً ونحصل على  $9a = 2.7 - 0.2 = 2.5$ . بضرب الطرفين في 10 للحصول على معادلة تحتوي أعداداً صحيحة أي  $90a = 25$  ومنها  $a = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$ .

مسألة أخرى للتجربة: أثبت أن  $\frac{7}{12} = 0.58\dot{3}$ ؟

في الختام، يمكننا تمثيل أي كسر في صورة كسر عشري متكرر (تذكر أن الكسور العشرية المنتهية تقع في هذه الفصيلة) والعكس بالعكس، ومن ثم إيجاد تناظر بين الأعداد القياسية والكسور العشرية المتكررة. قطعاً من السهل إيجاد كسور عشرية ليست متكررة، فعلى سبيل المثال العدد

$$b = 0.101001000100001000001\dots,$$

يوجد نمط لهذا المفكوك العشري، لكن ليس كسرًا عشريًا متكررًا. نستنتج أن  $b$  ليست عددًا قياسيًّا — لا يمكن كتابته كنسبة بين عددين صحيحين. الأعداد مثل  $b$ ، تعرف بأنها أعداد غير قياسية ومن السهل جدًا إيجادها. فمثلًا يمكنك أن ترى لماذا العدد  $0.12345678910111213141516\dots$  عدد غير قياسي؟

### عدم القياسية في الهندسة

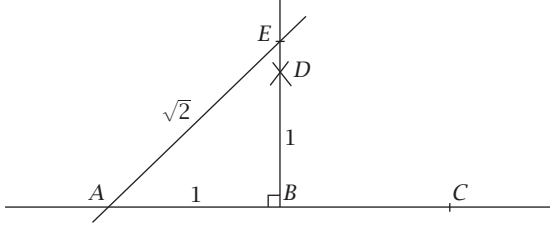
ليس من الصعب توليد أعداد على حاسبك ليس لها نمط واضح عند تمثيلها عشريًّا، جرب  $\sqrt{2} = 1.414213\dots$ ، هذا العدد يتطلب بعض التفكير. كيف نعرف أن  $\sqrt{2}$  ليس له تمثيل عشري متكرر؟ قد يكون طول كتلة التكرار به مئات من الأرقام، أو أن التكرار لا يبدأ حتى بعد مليون من الأماكن العشرية. بعبارة أخرى: قد يكون عددًا قياسيًّا بعد كل ذلك.

يقال إن الفيثاغورثيين في القرن السادس قبل الميلاد انزعجوا بشدة بشأن أعداد مثل  $\sqrt{2}$ . من المؤكد أنهم لم يكونوا ليسعدوا بطريقتنا في فعل الأشياء. بعد كل ذلك إذا لم يمكننا كتابة  $\sqrt{2}$  على صورة كسر فما معناها إذن؟

في نهجنا خلال مفكوك الكسور العشرية، موقفنا الفلسفي اعتمد على الآتي: نقول إن العدد يكون حقيقياً إذا أمكن إيجاد تمثيل عشري له. ولهذا السبب  $\sqrt{2}$  عدد حقيقي لأنه يمكننا إيجاد المفكوك له لأي عدد من الأماكن العشرية كالآتي: نبدأ بملاحظة أن  $1^2 < 2 < 2^2$  ومن ثم بأخذ الجذر التربيعي نجد أن  $1 < \sqrt{2} < 2$  أي أن العدد  $\sqrt{2}$  يقع بين 1 و 2 أي أن  $1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2$  ثم نلاحظ أن:  $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ . نستمر بهذه الطريقة للمكان الثاني والثالث العشري. ونتحقق من  $1.41 < \sqrt{2} < 1.415$  و  $1.414 < \sqrt{2}$ . وهكذا.

في الأساس لا توجد حدود لعدد الأماكن التي يمكن أن نحسبها لعدد  $\sqrt{2}$ ، ومن ثم طريقتنا في التفكير تؤدي إلى أن  $\sqrt{2}$  هو عدد حقيقي، حتى لو ظهر أن هذا العدد غير قياسي. (للتأكد توجد طرق أكثر كفاءة لاستخراج الجذور التربيعية من طريقتنا الساذجة، ولكنها كافية لتوضيح الفكرة). من قراءاتي، أعتقد أن الفيثاغورثيين لم يكن لديهم أي من هذا. كانوا يؤمنون بالبساطة ولديهم ريبه شديدة لأي عملية غير محدودة مثل العملية التي انغمسنا فيها تَوًّا. إنهم لم يقبلوا أن الشيء الذي قدم خلال عملية حسابية غير منتهية سيتمتع بنفس مكانة الأعداد القياسية العادية التي آمنوا بها وشكلت حجر الزاوية في فلسفتهم. ومع ذلك اعتقدوا في  $\sqrt{2}$  أيضاً، لكن لأسباب مختلفة تماماً. بالنسبة لهم  $\sqrt{2}$  كان عدداً ذا معنى لأنه يمكن تكوينه. ولشرح نظرتهم، نحتاج إلى تبني نهج هندسي.

نظرية فيثاغورث هي حقيقة بسيطة عن أي مثلث قائم الزاوية. إذا كانت أطوال الجانبين الأقصر هي  $a$  و  $b$  وكان طول الوتر هو  $c$  فإن النظرية تقول  $a^2 + b^2 = c^2$ . وكحالة خاصة إذا أخذنا  $a = b = 1$  فسنحصل على  $c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$ . ومن ثم فإن الجانب الأطول في المثلث هو



شكل ١

$c = \sqrt{2}$ . اليونانيون علموا أن مثل هذا المثلث يمكن تكوينه دون استخدام جهاز لقياس الطول أو الزاوية، لكن ببساطة باستخدام حافة مستقيمة وفرجار. في نظرهم هذا يعني أن العدد المتكون مثل  $\sqrt{2}$  يتمتع بوجود مادي، واعتبروه ذا أهمية خاصة.

دعونا نر كيف ينشأ العدد  $\sqrt{2}$ ، نقول إن عدد  $a$  يمكن إنشاؤه يعني أنه — بمعلومية أي قطعة مستقيمة لاستعمالها كمعيار لوحدة الطول — توجد مجموعة من العمليات المتتالية التي يمكن القيام بها باستخدام حافة مستقيمة (ليست مسطرة مقسمة، بل مجرد حافة مستقيمة) وفرجار تقود إلى قطعة مستقيمة أخرى لها الطول  $a$ . لتكوين المثلث القائم الزاوية والمتساوي الساقين الذي ذكرناه سابقاً، يمكن أن نستمر كالتالي: (المثلث المتساوي الساقين يعني أن طولي الضلعين متساويان ومن ثم الزاويتان أيضاً متساويتان).

إذا أعطيت القطعة المستقيمة ولها النهايتان  $A$  و  $B$  لتستخدمها كوحدة عيارية للطول. مد القطعة المستقيمة من جهة  $B$  واستخدم الفرجار لتحديد النقطة  $C$  على يمين النقطة  $B$  بحيث إن  $AB$  و  $BC$  يكون لهما نفس الطول كما في الشكل ١.

افتح الفرجار وارسم قطعة من قوس دائرة مركزها النقطة  $A$  ودون تغيير فتحة الفرجار، افعل نفس الشيء من النقطة  $C$ . الدائرتان سوف تتقاطعان أعلى وأسفل النقطة  $B$ : لتكن النقطة هي  $D$ ، هي نقطة التقاطع أعلى  $B$  ارسم الخط من  $B$  إلى  $D$ . بالتماثل الزاوية  $ABD$  هي زاوية قائمة.

استخدم الفرجار، مرة أخرى، لتحديد طول مساوٍ لـ  $AB$  على الخط بين  $B$  و  $D$ . حدد النقطة النهائية  $E$ ، ونتيجة لهذا التكوين فهي الرأس الثالثة للمثلث القائم حيث الجانبان  $1(AB)$  و  $1(BE)$  ومن نظرية فيثاغورث  $(AE) = \sqrt{2}$ .

حقيقة أن  $\sqrt{2}$  عدد غير قياسي عكست طريقة تفكير الفيثاغورثيين. وهناك بعض القصص عن تهديدات بالقتل أو القتل فعلاً لإيقاف هذه الأخبار السيئة للغاية.

هذا يعتبر غير منطقي مقارنةً بطريقة تفكيرنا، وحيث إنه قد مرت حتى وصلنا إلى عصرنا الحالي آلاف السنين، أصبحت هذه القصص لا تثير إلا السخرية.

دعنا نرى لماذا من المستحيل كتابة  $\sqrt{2}$  على صورة كسر اعتيادي. سوف نستخدم أسلوب التعارض، سوف نفرض العكس من ذلك ثم نبحت عما يعارض ذلك.

نفرض عكس ما نريد إثباته، أن  $\sqrt{2}$  هو العدد القياسي  $\frac{a}{b}$ ، بحيث لا يوجد عامل مشترك بين  $a$  و  $b$ . بتربيع طرفي  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  نحصل على  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ . أي أن:

$$2b^2 = a^2.$$

لاحظ أن الطرف الأيسر مضاعف للعدد 2، أي أنه عدد زوجي ومن ثم  $a^2$  هو أيضاً عدد زوجي.

وهذا بالتبعية يعني أن  $a$  نفسها عدد زوجي. (حاصل ضرب أي عددين فرديين هو أيضاً عدد فردي فإذا كان  $a$  عدداً فردياً فإن  $a^2$  سيكون فردياً).

ومن ثم يمكن استبدال  $2c$  بـ  $a$  حيث  $c$  عدد صحيح. ومنها فإن:

$$2b^2 = (2c) \times (2c) = 4c^2.$$

نحذف العدد المشترك 2 من طرفي هذه المعادلة نحصل على:  $b^2 = 2c^2$ . هل تستطيع رؤية الصعوبة القادمة؟ باستخدام نفس المنطق (السببية) كما حدث سابقاً نستنتج أن  $b$  تماماً مثل  $a$  هو عدد زوجي. لكن هذا يناقض الفرض الأصلي أن  $a$ ،  $b$  ليس بينهما عامل مشترك. أي فكرة كتابة  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  أدى إلى نتيجة خاطئة وهي أن كلاً من  $a$  و  $b$  مضاعف لعدد 2. لم يتبقَ لنا خيار سوى أن نعترف بأنه لا يمكن كتابة  $\sqrt{2}$  على صورة كسر اعتيادي. سوف أثبت في الفصل التاسع أنه من الممكن كتابة  $\sqrt{2}$  كمفكوك مكرر من نوع آخر.

الرياضيات الحديثة ممتعة بنتائج من هذا النوع. هذه فقط لإثبات أنه توجد في العالم أكثر من مجرد النسبة بين الأعداد الصحيحة. القدياء في شوق عاطفي لنظام فلسفي يحتوي كل شيء ومن ثم كانت خيبة أملهم مريرة بسبب الاكتشافات الجديدة التي انتهكت معتقداتهم. لا يزال هناك منا الذين يبحثون عن صورة كاملة للكون لكن هذا الموقف يعيق التقدم أكثر من المساعدة عليه. مرة بعد أخرى جوانب عديدة للعلم ازدهرت فقط عندما استرخى الناس وتابعوا الأفكار الجديدة بدون موانع ودون تحيز أو الحاجة إلى تبرير ما يفعلونه من وجهة نظر الفلسفة سواء كانت دينية أو علمانية.

مجرد تحديد عدد غير قياسي واحد، يفتح البوابات لأنك تستطيع أن تولد فوراً الكثير غير المتناهي: نفرض أن  $x$  عدداً غير قياسي (يمكن أن تأخذ  $x = \sqrt{2}$  إذا رغبت). ومن ثم لأي عدد قياسي  $\frac{a}{b}$  سواء كان موجباً أو سالباً فإن العدد  $x + \frac{a}{b}$  يكون عدداً غير قياسي أيضاً، لأنه إذا حدث العكس وكان يساوي  $\frac{c}{d}$  فسوف نحصل على:

$$x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{(bc - ad)}{bd},$$

وهو عدد قياسي، مناقض لفرض  $x$  عدداً غير قياسي. نفس الشيء يحدث إذا ضربنا  $x$  في عدد قياسي  $\frac{a}{b}$ . طالما  $a$  ليست الصفر فإن حاصل الضرب لا يمكن أن يكون عدداً قيسياً لأن هذا سوف يؤدي

مرة أخرى إلى أن  $x$  عدد قياسي (النقطة بين الأعداد القياسية تعني الضرب):

$$\frac{a}{b} \cdot x = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}.$$

مثال تلك الأعداد  $1 + \sqrt{2}$  (بجمع 1) و  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (بالضرب في  $\frac{1}{3}$ ) هي أعداد غير قياسية اعتمادًا على عدم قياسية  $\sqrt{2}$ .

الشيء الجدير بالملاحظة أنه من الممكن جدًا جمع عددين غير قياسيين موجبيين أو ضربهما وتحصل على إجابة قياسية. مثلًا  $2\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  عدنان موجبان غير قياسيين لكن  $2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 = 4$  وبنفس الطريقة  $2 - \sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  كلاهما عدد غير قياسي موجب مجموعهما 2.

الأكثر غرابة، توجد حجة دقيقة لإثبات أن هناك عددين غير قياسيين  $a$  و  $b$  بحيث إن  $a^b$  يكون عددًا قياسيًا. سوف نثبت هذا على الرغم من أننا لن نستطيع إيجاد العددين  $a$  و  $b$  فعلًا! سوف أذكر أولًا ببعض سلوك قوى الأعداد.

### الأسس، اللوغاريتمات، والأعداد غير القياسية:

أول قوانين الأسس هو  $a^n \times a^m = a^{n+m}$ . هذا واضح إذا لاحظت أن الأس  $n$  والأس  $m$  هو عدد العوامل في حاصل الضرب، فمثلًا:

$$a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a),$$

وهذا يعني أن  $a$  مضروب في نفسه  $5 = 2 + 3$  من المرات. بنفس الطريقة يمكننا إيجاد معنى القانون الثاني للأسس من خلال الحذف:  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ، فمثلًا:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{(a \times a \times a \times a \times a)}{(a \times a)} = a^{5-2} = a^3.$$



وأخيراً القانون الثالث للأسس هو بالمثل عبارة حسابية:  $(a^n)^m = a^{nm}$ ،  
فمثلاً:

$$(a^2)^3 = (a \times a) \times (a \times a) \times (a \times a) = a^{2 \times 3} = a^6.$$

هذا المعنى ينسحب أيضاً على القوى (الأسس) الصحيحة غير الموجبة وذلك بالإصرار على أن هذه القوانين صحيحة دائماً، فمثلاً نعني بالعدد  $a^{1/2} = \sqrt{a}$  لأن:

$$a^{1/2} \times a^{1/2} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a = a^1,$$

وهكذا ويمثل هذا التوضيح:

$$a^{1/2} \times a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a,$$

التوافق مع القانون الأول.  
العدد  $a^{-1}$  يعني العدد  $\frac{1}{a}$  لأن هذا متوافق مع استخدام القانون الثاني في أوضاع مثل:

$$\frac{a}{a^2} = \frac{1}{a};$$

طرح الأدلة هنا يؤدي إلى قوى  $-1 - 2 = -1$ . القانون الثاني يتطلب أيضاً أن نأخذ  $a^0 = 1$  للتحقق من الحقيقة أن  $\frac{a^2}{a^2} = 1$  لأن طرح الأدلة هنا يترك القوى  $2 - 2 = 0$ .

بالنظر إلى قوانين الأسس، يمكننا أن نثبت وجود عددين غير قياسيين  $a$  و  $b$  حيث  $a^b$  عدد قياسي. أولاً نأخذ الحالة  $a = b = \sqrt{2}$ .

العدد  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  إما أن يكون قياسياً أو لا. فإذا كان العدد قياسياً فهذا هو المطلوب. من جهة أخرى إذا كان هذا العدد غير قياسي (وهذا قد يكون الاحتمال الأكثر توقعاً) نضع  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  و  $b = \sqrt{2}$ . فيكون العددان غير

قياسيين وباستخدام القانون الثالث للأسس نحصل على:

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

ومن ثم في كلا الحالتين فإن الأعداد غير القياسية موجودة. الشيء الملاحظ في هذا البرهان أنه أعطى بدلين واستنتج أن أحدهما يقود إلى مثال عن زوج من الأعداد لهما الخاصية المطلوبة ولكنه لا يقدم أي فكرة عن عددين يحققان ذلك. لهذا السبب كثير من الناس بما فيهم بعض علماء الرياضيات يعتبرون هذا البرهان عملياً لا قيمة له. لكن هذا لا يزعجني.

حيث إننا استغرقنا وقتاً لمراجعة قوانين الأسس فلدينا فرصة عرض بعض من خواص اللوغاريتمات، وهو موضوع تعرّف عليه الكبار بإسهاب خلال المرحلة الثانوية.

التعريف بسيط: إذا كان  $y = 10^x$  فنقول إن  $x$  هي لوغاريتم  $y$  للأساس 10 ونكتب  $x = \log_{10} y$  نستطيع إبدال أي أساس آخر بالأساس 10، لكننا لسنا في حاجة لفعل ذلك هنا.

سوف نستخدم فقط الأساس 10 ونكتب  $x = \log y$  ليعني أن  $y = 10^x$  فمثلاً  $\log 1000 = 3$  لأن  $10^3 = 1000$ ،  $\log 0.1 = -1$  لأن  $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$ .

إن الخاصية السحرية للوغاريتمات التي أدت إلى ثروة علمية كانت تحويل الضرب والقسمة إلى جمع وطرح لأن:

$$\log ab = \log a + \log b; \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$$

قد سمح لنا ذلك بإجراء عمليات الضرب والقسمة الصعبة بدقة عالية بضرب العددين  $a$  و  $b$  نبحث عن لوغاريتمي العددين ثم نجمعهما ونوجد العدد الذي لوغاريتمه هذا المجموع أي نحصل على مقابل اللوغاريتم. هذه الخواص هي نتيجة بسيطة لتعريف اللوغاريتم وقوانين الأسس. فمثلاً

خاصية الجمع تنشأ من القانون الأول للأسس نكتب  $x$  و  $y$  للعددين  $\log a$  و  $\log b$  على الترتيب فيكون:

$$a = 10^x, b = 10^y \Rightarrow ab = 10^x 10^y = 10^{x+y},$$

ومن ثم فإن:  $\log ab = x + y = \log a + \log b$  بالمثل خاصية الطرح تنشأ من القانون الثاني، عند شرح القانون الثالث نحصل على الخاصية الإضافية أن:  $\log(x^y) = y \log x$  ومن ثم، فمثلاً:

$$\log \sqrt{10} = \log(10^{1/2}) = \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2}.$$

كل ما هو مطلوب بشكل حاسم ونهائي هو جدول اللوغاريتمات للأعداد بين 1 و 10 وبعد ذلك يمكن فعلاً الحصول على لوغاريتم أي عدد؛ لأن أي عدد خارج المنطقة 1 - 10 يمكن التعامل معه بقوانين اللوغاريتمات فمثلاً:

$$\log 84 = \log(10 \times 8.4) = \log 10 + \log 8.4 = 1 + \log 8.4 = 1.9243.$$

ولعلك تتذكر أن هذين الجزأين للوغاريتم،  $\log 10$ ،  $\log 8.4$  معروفان باسم الجزء العشري والمميز على التوالي.

اللوغاريتمات كانت أهم الوسائل العملية منذ فترة ليست بعيدة وكانت المسطرة المنزلقة (الحاسبة) هي الظاهرة المادية لها. هذه الأدوات (المسطرة) كانت مقسمة لوغاريتمياً بدقة فائقة لجمع وطرح اللوغاريتمات. المسطرة المنزلقة الجيدة كانت قطعة هندسية جميلة.

ما تزال إذا كنت تحتفظ بوحدة فربما يكون من الحكمة أن تحافظ عليها فقد تصبح من الأشياء عالية القيمة التاريخية.

التقنية المحتواة في اللوغاريتمات لم تعد تدرس على الإطلاق لأن الغرض الأساسي منها كان عملياً وبذلك أصبحت موضة قديمة بوصول الآلات الحاسبة التي تقوم بالعمل بدقة وبسرعة أكبر. على أية حال، هناك خسارة حقيقية صاحبت اختفاء كتاب الجداول. فالتكرار بإمعان في صفحات اللوغاريتمات والدوال المثلثية ولدت التآلف مع سلوك الدوال نفسها. الأكثر من ذلك الوسائل

المستخدمة لاستعمال القياس والاستكمال (بمعنى تقدير قيم وسيطة لم تكتب صراحة في القائمة) ومن ثم كان المستخدمون يحتاجون إلى الاحتفاظ بذكائهم الرياضي عنها، حيث إن الطلاب في الوقت الحاضر الذين يعتمدون على الآلات الحاسبة لا يملكون هذا الذكاء، لأن المسألة عندما تختصر إلى مجرد تطبيق للآلة، فالطالب يصبح سلبياً نسبياً، ويتعلم أقل ويوافق على أي شيء تنتجه الآلة الحاسبة دون أي نقد.

يجب أن أضيف أن الدالة اللوغاريتمية ما زالت مهمة في العلوم، فكثير من المقاييس الطبيعية هي لوغاريتمية الأساس، فمقياس الحموضة pH، ومقياس ريختر للزلازل، ومقياس الصوت decibel هي ثلاثة من كثير، بالإضافة إلى أن اللوغاريتم الطبيعي نشأ بشكل لا يقاوم في حساب التفاضل والتكامل، اللوغاريتم للأساس  $e = 2.7182 \dots$ ، العدد  $e$  هو عدد غير قياسي نشأ في مسائل خاصة بالربح المركب. ومن ثم طلاب العلوم ما زالوا في حاجة إلى دراية شاملة بحساب اللوغاريتمات، وهم يعانون بفقدانهم التدريب العملي التقليدي الذي تقدمه جداول اللوغاريتمات.

اخترع اللوغاريتمات كان دفعا قويا للعلوم حول منعطف القرن السابع عشر والفضل يعود بالدرجة الأولى إلى الاسكتلندي نابير (John Napir) ومع ذلك لم يكن تطورها واضحا كما هو متوقع، لوغاريتمات نابير الأصلية كانت أقرب ما يكون إلى ما يسمى باللوغاريتم الطبيعي المشار إليه سابقا. وعلاوة على ذلك، التقنيات المتوازية كانت تستخدم بواسطة علماء الفلك براها وكيبلر في الدانمرك، في نفس الوقت كانوا يقومون بحسابات صعبة جدا على مدار كوكب المريخ باستخدام تقنية تحتوي على متطابقات من حساب المثلثات وتخدم في التعبير عن حاصل الضرب كمجموع. أهمية هذه المتطابقات أصبحت موضع تقدير في أوروبا خلال القرن السادس عشر، القواعد نفسها تم اكتشافها في الشرق الأوسط في فترة ترجع إلى القرن الحادي عشر.

بما أننا في موضوع غير القياسية، فمن الإنصاف أن نذكر بأن إحدى الصعوبات مع اللوغاريتمات هو أن لوغاريتم العدد القياسي هو عدد غير

قياسي إلا إذا كان قوة للعدد 10. فمثلاً من السهل رؤية ذلك للعدد  $\log 3$ : مرة أخرى سوف نستخدم البرهان بالتناقض. نفرض أن  $\log 3$  يساوي الكسر  $\frac{a}{b}$  وهذا يعني أن  $3 = 10^{a/b}$  وبرفع طرفي هذه المعادلة للقوة  $b$  نحصل على  $3^b = 10^a$ . وذلك غير ممكن لأن الطرف الأيسر عدد فردي بينما الطرف الأيمن عدد زوجي.

### عدم قياسية الأعداد هو الطبيعي:

على الرغم من أنه توجد بيانات كثيرة جداً صائبة في العالم، فنحن نعرف جميعاً أن الصواب أصعب كثيراً في الحصول عليه من الخطأ. بنفس الطريقة، عدم القياسية شائعة في عدد المرات أكثر من القياسية عند التحدث عن أعداد غير معينة (لأي أعداد). هذا لا ينبغي أن يؤخذ على أنه ملاحظة غير هامة تخص الأعداد غير القياسية، ولكن مجرد وسيلة لتوصيل فكرة أنه بالرغم من وجود أعداد كثيرة جداً قياسية فإن قياسية الأعداد ينظر إليها بصدق على أنها استثناء.

إذا فكرنا في الأعداد على أنها مفكوك عشري، فسيصبح واضحاً أن الأعداد غير القياسية التي ليس لها مفكوك غير متكرر يجب أن تكون أكثر شيوعاً من المفكوكات المتكررة للأعداد القياسية. حجة ساذجة تكون بتخيل توليد عدد عشري عشوائي بطريقة ما (بالتقاط الأرقام من قبعة مثلاً). فرصة المفكوك أن يقع في نمط كتل متكررة ليس فقط عدداً كبيراً من المرات ولكن مؤكد أنها إلى الأبد ستكون صفراً. وهذا فعلاً حدس صحيح، ولكنه من شأنه أن يحتوي على بعض الجهد لجعله دقيقاً. الصعوبة في ذلك أن الحجة تدعو إلى اللبس في مفهوم المحدودية (نهائية) واللامحدودية (لانهائية) وهنا نسمح لأنفسنا بالكلام عن نتيجة عملية لانهائية وكأننا فعلاً نفذناها.

النقد يعتمد على ملاحظة أن كلا المجموعتين — الأعداد القياسية والأعداد غير القياسية — لانهايتان بوضوح، فليس من المنطقي أن نقول إن إحدهما قد تكون أكبر من الأخرى. هذه النتيجة تعتمد على منطق أن جميع المجموعات هي نفسها أساس، وهي فكرة لا تعتمد على التدقيق الجاد.

كان جاليليو أول من أوضح أن الطبيعة الغريبة للمجموعة اللانهائية يمكن تقسيمها إلى جزأين وكل منهما لانهائي ويمكن وضعهما في تناظر أحادي مع المجموعة الأصلية. فمثلاً لا نحتاج إلى النظر أبعد من المجموعة  $N$  للأعداد الطبيعية  $\{1, 2, \dots\}$  هذه يمكن تجزئتها إلى  $O$  مجموعة الأعداد الزوجية ومجموعة الأعداد الفردية على الترتيب، بمعنى أنه على الرغم من أنها جميعاً مجموعات لانهائية،  $N$  أكبر من  $E$ ، فـ  $E$  محتواة داخل  $N$ ، جاليليو أوضح أن ما يجعل المجموعة اللانهائية تختلف عن المجموعة النهائية (المحدودة) أن الشخص يمكنه إزالة مجموعات لانهائية منها مثل  $E$  من  $N$  وما يبقى ( $O$  في هذه الحالة) ما زال مجموعة لانهائية. بنفس الطريقة المجموعات النهائية لا يمكن أن تحقق ذلك — إذا أخذنا بعض الأشياء بعيداً من مجموعة نهائية فمن المؤكد أن الباقي بعد ذلك أصغر من الأصل. هذا هو الفارق الأساسي بين طبيعة اللانهائية وطبيعة المجموعة النهائية.

عملياً المجموعات اللانهائية يمكن جعلها أسهل في العمل في المجموعات النهائية مادمت تعودت على هذا الجانب من تركيبها.

توجد طريقة أساسية أخرى حيث المجموعات تختلف عن اللانهائية بعضها عن بعض وهي أقل وضوحاً، ويبدو أنها لم تأخذ حقها حتى نهاية القرن الثامن عشر. بعض المجموعات اللانهائية يمكن كتابتها في قائمة والبعض لا يمكن.

مجموعة الأعداد الطبيعية وتسمى  $N$  وهو فصل أعداد العد  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . هذه المجموعة تجسد فكرة القائمة اللانهائية. غير أن بعض المجموعات اللانهائية الأخرى يمكن أن توضع في تناظر واحد إلى واحد مع الأعداد الطبيعية ومن ثم يمكن أن توضع في قائمة كذلك. فمثلاً خذ المجموعة  $Z$ ، جميع الأعداد الصحيحة، أي الأعداد الموجبة والأعداد السالبة معاً بالإضافة إلى الصفر:

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

هذه المجموعة تصل إلينا طبيعياً كنوع من قائمة مضاعفة لانتهائية يمكن على أية حال إعادة ترتيبها في قائمة لها نقطة بداية كالتالي:

$$Z = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots \quad (2)$$

في الحقيقة، سوف نستخدم الفكرة المستعملة هنا أكثر من مرة، إذا كان لدينا قائمتان:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \quad b_1, b_2, b_3, \dots,$$

نستطيع إدماجهما معا لتكوين قائمة واحدة تحوي جميع عناصر القائمتين الأصليتين

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$$

هذا ما حدث عندما جمعنا بين الأعداد الموجبة والسالبة في قائمة واحدة. قد تظن أنه لا يوجد أكثر مما حدث هنا. من المؤكد إذا أعطيت أي مجموعة فيمكن اعتبارها قائمة بشكل ما. لكن كيف الحال مع المجموعة  $Q$  مجموعة الأعداد القياسية كلها؟ (لماذا استخدم الحرف  $Q$  للأعداد القياسية؟ هل لها علاقة بكلمة «القسمة» quotient). في الحقيقة قد يكون كذلك ولكن نحتاج أن تكون أكثر مهارة. سوف ننظر إلى مشكلة أصعب بعد لحظة، أريد أولاً إزالة مصدر الالتباس المحتمل.

القارئ قد يعترض بشدة على ما أثرته سابقاً، من حيث إن حجة الإدماج السابقة تحتوي على الحديث الواهن عن العملية اللانتهائية وكأننا قد نفذناها فعلاً كاملة. وجهة النظر هذه ليست ضرورية لتوضيح — مثلاً — أن مجموعة الأعداد الصحيحة تُكوّن قائمة، مادماً قدمنا بوضوح ماذا نعني بذلك. تكون قائمة لانتهائية  $L$  أعني بها هنا أن لكل عدد  $n$  توجد قاعدة لتعيين الحد النوني في  $L$ . عندما أدعي أن  $L$  هي قائمة لكل الأعداد الصحيحة، بمعنى لأي عدد  $k$  يمكن إيجاد المكان حيث تظهر  $k$ . بكلمات أخرى، على

الرغم من أننا قد ننتظر إلى الأبد حتى تظهر جميع الأعداد الصحيحة، علينا فقط أن ننتظر لعدد محدود من الخطوات لأي عدد مُسمى حتى يظهر. صحيح أنني لم أعط أبداً قاعدة لتحديد العنصر النوني في القائمة (2) السابقة صراحة، لكنني اعتمدت على القراء في معرفة النمط البسيط المستخدم في تكوينها. لا حرج في ذلك شريطة أن تتمكن من مواصلة الكتابة أكثر من هذه القائمة بطريقة ليست غامضة وليس بها خداع. على أية حال، العدد الموجب  $n$  يحتل المكان  $2n$  في القائمة فمثلاً العدد 3 هو السادس في القائمة والعدد السالب  $-n$  يشغل المكان الذي رتبته  $(2n + 1)$  فمثلاً  $-3$  موجودة في المكان السابع والصفر في المرتبة الأولى، ولهذا نرى أننا نعرف المكان على وجه الدقة لكل عدد صحيح في قائمتنا، فكلها موجودة ومحسوبة.

لنختبر الآن مشكلة كتابة قائمة بجميع الأعداد القياسية بين صفر وواحد. هذه تبدو مهمة صعبة لأن الأعداد القياسية كثيفة، بمعنى أنه بين أي عددين منها يوجد عدد آخر، فمثلاً المتوسط لهما يقع بالضبط في منتصف الطريق بينهما. هذه على أية حال لا تشكل أي صعوبة حقيقة مادمت لا تصر على أن نكتب أعدادنا في نظام تزايد أو تناقص، ببساطة نكتب قائمة الأعداد القياسية التي مقامها واحد أولاً (أي الأعداد  $0 = \frac{0}{1}$  و  $1 = \frac{1}{1}$ ) ثم جميع الأعداد التي مقامها 2 ثم التي مقامها 3 وهكذا:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

الملاحظة الأساسية أنه يوجد دائماً وأبداً عدد كبير محدود من الأعداد القياسية بين صفر وواحد لها مقام بعينه (إذا كانت  $n$  هو المقام فلا يوجد أكثر من  $n$  منها) ومن ثم بناء قائمة بهذه الطريقة سوف يعطي في نهاية المطاف كل الأعداد القياسية بين صفر وواحد، لن يهرب أي منها.



الآن تأتي خدعة أخرى. إذا أخذنا جميع أعضاء هذه القائمة بين صفر وواحد ثم قلبنا كل واحد منها فسوف نحصل على جميع الأعداد القياسية الأكبر من الواحد:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{4}{3}, \frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \dots$$

هذا يتطلب التفكير قليلاً. ولأن جميع الكسور في القائمة الأولى تقع بين 0 و1، فإن معكوساتها تكون أكبر من الواحد. علاوة على ذلك إذا كان  $\frac{m}{n}$  عدد قياس أكبر من الواحد فإن  $\frac{n}{m}$  عدد قياس أصغر من الواحد، أي يقع بمكان ما في قائمتنا الأولى، ومن ثم معكوسه  $\frac{m}{n}$  سيقع في المكان المناظر من القائمة الثانية. فمثلاً  $\frac{5}{4}$  يقع في المكان التاسع في القائمة المعكوسة كما أن  $\frac{4}{5}$  هو التاسع في قائمة الكسور (التي تبدأ بـ  $\frac{1}{2}$ ). مرة أخرى لا يفقد أي عدد قياساً. هذه تبدو جيدة جداً لتكون صحيحة لأنه يبدو أن الأعداد القياسية أكبر من الواحد أكثر منها بين 0 و1.

لكن كما قلت المجموعات النهائية يمكن أن تكون غريبة.

الآن لدينا مجموعتان يمكن وضعهما في قوائم: الأعداد القياسية بين 0 و1 والأعداد القياسية أكبر من الواحد. باستخدام حجة الإدماج التي استخدمناها سابقاً لإثبات أن الأعداد الصحيحة يمكن أن تكتب في قائمة فيمكننا الجمع بين هاتين المجموعتين في قائمة واحدة، مما يدل على أن الأعداد القياسية بدءاً من الصفر إلى أعلى يمكن أن تكون قائمة.

أخيراً بنفس الطريقة، يمكننا أن نكون قائمة من جميع الأعداد القياسية السالبة، ثم بالإدماج مرة أخرى يمكننا جمع هذه القائمة مع قائمة الأعداد القياسية غير السالبة، لتنتج قائمة واحدة تحتوي على كل الأعداد القياسية. يمكننا فعلاً كتابة دسنتين من الأعداد القياسية الأولى في قائمتنا: سوف نكتب الأعداد القياسية الصحيحة دون المقام «1» لتقليل الفوضى. للحفاظ على العرض أكثر تماثلاً، سوف نرتب الأشياء باختلاف قليل: نبدأ بالصفر ولتكن  $L_1$  هي القائمة الأولى للأعداد القياسية بين «0» و«1»، لتكن  $L_2$  هي

معكوس الأعداد في  $L_1$ ، و  $L_3$  هي سالب الأعداد في  $L_1$ ، وكذلك  $L_4$  هي سالب الأعداد في  $L_2$ . عملية الإدماج تعطي قائمتنا العظمى  $Q$  على النحو التالي:

$$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 4, \\ -4, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, 5, -5, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \\ -\frac{2}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \dots$$

القراء يجب ألا يجدوا مشقة كبيرة في مد هذه القائمة إلى عدد آخر من هذه الحدود.

### إلى ما لا نهاية وما بعدها

شخصية Buzz Light Year في فيلم الأطفال قصة لعبة Toy Story تحضنا على السفر إلى ما لا نهاية وما بعدها، هي الشيء العزيز جداً على قلب علماء الرياضيات الذين اتخذوها عملهم لأكثر من قرن من الزمان، والآن لدينا فكرة جيدة وجميلة عما نتوقع عند الوصول إليها.

يوجد الكثير من المجموعات الكبيرة من الأعداد التي يمكن كتابتها في قائمة بالطريقة التي وصفناها في البند السابق. إحدى هذه المجموعات التي تحتوي  $Q$  هي مجموعة فصل جميع الأعداد الجبرية. هذه الأعداد هي حلول معادلات كثيرة حدود لها معاملات صحيحة (أي أن معادلة مثل  $6x^3 + 5x^2 + 8x + 1 = 0$ ، حيث الأعداد المضروبة في قوى  $x$  هي أعداد صحيحة). كل عدد قياس  $\frac{a}{b}$  هو حل لمعادلة بسيطة  $bx - a = 0$ ، ومن ثم فهو جبري. نفس الشيء ينطبق على العدد  $\sqrt{2}$  الذي هو حل للمعادلة  $x^2 - 2 = 0$ ، ونفس الشيء بالنسبة  $2^{1/3}$  أي الجذر التكعيبي للعدد 2 لأنه حل للمعادلة  $x^3 - 2 = 0$ . العدد غير الجبري هو بشكل ما غامض يسمى متسامياً. كما سنرى حالاً، الأعداد المتسامية ليست نادرة تماماً بالرغم من أن إثبات أن عدداً ما متسامٍ هو صعب بشكل غير عادي.

العدد غير القياسي  $b$  الذي قُدم سابقًا هو عدد متسام (بالرغم من أن هذا أبعد عن أن يكون واضحًا) وكذلك العدد  $\pi$ . إثبات أن  $\pi$  ليست عددًا جبريًا كان في القرن التاسع عشر بواسطة ليندمان Lindemann، ونتيجة لذلك استحالة تربيع الدائرة، بمعنى إذا أعطيت دائرة فمن المستحيل رسم مربع باستخدام حافة مستقيمة وفرجار، له نفس مساحة الدائرة المعطاة. الصعوبة تكمن في أن الأعداد المشيدة هي أعداد جبرية. تربيع الدائرة هو في الواقع تحدٍ لتشييد  $\sqrt{\pi}$ ، إذا أمكنك تشييد  $\sqrt{\pi}$  فيمكنك تشييد العدد المتسامي  $\pi$ ، لكن من المستحيل تشييد عدد متسام.

حتى إنه ليست جميع الأعداد الجبرية مشيدة. بالأخص  $2^{1/3}$ ، هو عدد جبري غير مشيد وهذا يضع سؤالًا كلاسيكيًا آخر: إذا أعطيت مكعبًا هل يمكنك تشييد (بناء) مكعب آخر له بالضبط ضعف حجم المكعب الأصلي؟ هذه مشكلة ديلان Delian الشهيرة: «المهمة التي حددها الرب حتى يبعد الطاعون عن أثينا.»

آخر هذه المشاكل الثلاث الكلاسيكية هو مهمة تثليث الزاوية أي تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أجزاء متساوية، فمع أن بناء زاوية  $60^\circ$  بسيط للغاية بهذا الشكل فمن المستحيل فعل ذلك مع زاوية  $20^\circ$ . ومن ثم تمت الإجابة عن هذه المسائل الثلاثة بالنفي بعد أكثر من ٢٢٠٠ سنة من وضع هذه الأسئلة.

كثير من الناس يشعرون بالإهانة من كلمة مستحيل ويفرضون الاعتقاد في أي تصريح علمي يحتويها. الادعاءات المذكورة سابقًا يمكن جعلها أقل استفزازًا كالتالي: تبين أن الأعداد المشيدة لها خواص خاصة لا تتمتع بها جميع الأعداد، ونستطيع تحقيقها في الحالة الخاصة  $2^{1/3}$  التي تفتقر إلى واحدة من هذه الخواص. هذا النص الخفيف يكون مؤثرًا بنفس جرأة الزعم أنه من المستحيل بناء ضعف المكعب في الحجم.

بالعودة إلى تحقيقاتنا الراهنة، فإننا كتبنا مجموعة الأعداد القياسية في قائمة، أي: الأعداد التي لها مفكوك عشري تكرر. سوف نثبت الآن أنه من المستحيل عمل قائمة مماثلة لجميع الأعداد الحقيقية — جميع المفكوكات

العشرية للأعداد بين 0 و1. إذا رغبت في ذلك. كيف نعرف أنه لا توجد طريقة لفعل ذلك، هذه الطريقة ببساطة لم نفكر فيها؟ نعلم لأن جورج كانتور Georg Cantor في نهاية القرن التاسع عشر، استحدث طريقته التي تسمى الحجة القطرية لإثبات أن هذا الأمر مستحيل. كل مكونات هذه الطريقة هي الملاحظة. وأوضح بعناية أكثر وفي لحظة أنه بالنسبة لأي قائمة لانهائية  $L$  من الكسور العشرية (بين 0 و1 مثلاً) من الممكن استخدام نفس القائمة لتشديد كسر عشري آخر بين 0 و1 غير موجود بالقائمة الأصلية  $L$ . هذا يبدو غير مؤذ تماماً لكن ينتج من ذلك حالاً أنه لا توجد قائمة تحوي كل عدد حقيقي بين 0 و1.

الحجة نفسها تجري بطريقة مشابهة. بغرض أن لديك قائمتك  $L$ ، كل ما نحتاج إليه هو كتابة عدد  $a$  يختلف عن العدد الأول في القائمة  $L$  في المكان العشري الأول، ويختلف عن العدد الثاني في القائمة في المكان العشري الثاني، وهكذا ... يختلف العدد الذي ترتيبه  $n$  في المكان العشري رقم  $n$ . هذا العدد الذي تكوّن يختلف عن كل عدد في القائمة. إذا تخيلت أن كل الأعداد العشرية تعرض في القائمة  $L$  واحداً بعد الآخر، فسنبني العدد  $a$  بالنظر إلى قطر قائمة العرض من أعلى اليسار إلى أسفل يمين وتتأكد أن  $a$  تختلف عن السطر النوني في المنظومة عند المكان الذي يقع في العمود النوني.

المجموعات التي لا يمكن كتابتها في قائمة تسمى غير قابلة للعد، والمجموعات التي يمكن كتابتها في قائمة تسمى قابلة للعد (بالرغم من كونها قد تكون لانهائية مثل مجموعة الأعداد القياسية). من الواضح أنه إذا كانت المجموعة  $A$  قابلة للعد، فكذا أي مجموعة  $B$  محتواة داخلها، لأن لكتابة قائمة  $B$  تحتاج فقط قائمة  $A$  ونقرأ خلالها عناصر  $B$  ونكوّن قائمة للمجموعة  $B$ . ومن ثم إذا كانت  $S$  مجموعة غير قابلة للعد فإن أي مجموعة  $T$  تحتوي  $S$  غير قابلة للعد أيضاً (لأنه إذا كانت  $T$  قابلة للعد فإن  $S$  ستكون كذلك من الحجة السابقة) ومن ثم لأن مجموعة الأعداد الحقيقية بين 0 و1 ثبت أنها غير قابلة للعد فإن المجموعة  $R$  مجموعة كل الأعداد

الحقيقية تكون أيضاً غير قابلة للعد بالرغم من أن المجموعة  $Q$  للأعداد القياسية قابلة للعد. ولهذا فقد اكتشفنا بطريقة نوعية أن مجموعة الأعداد العشرية أكبر من مجموعة الأعداد القياسية.

ممكن إضافة أنه: ينتج من حقيقة أن مجموعة كل الأعداد الجبرية  $A$  قابلة للعد (ولم تثبت ذلك هنا ولكنه أصعب قليلاً من إثبات مجموعة الأعداد القياسية قابلة للعد) أن مجموعة كل الأعداد المتسامية  $T$  غير قابلة للعد. (إذا كانت  $T$  قابلة للعد فالمجموعة المكونة من  $A$  و  $T$  ستكون قابلة للعد، وهذا يناقض أن اتحادهما هو الأعداد الحقيقية المعروف أنها غير قابلة للعد.) هذه نتيجة هامة للغاية لأنها توضح أن  $T$  مجموعة غير قابلة للعد (وعلى الأخص لانهائية) دون معرفة أي من عناصرها. بكلمات أخرى، يمكننا معرفة وجود كثير من الأعداد المتسامية غير القابلة للعد دون معرفة هوية أي عنصر منها.