

السلسلة الفضية

عكاشة
BOOKSTORE

الناشر

الحصري والوحيد

لكتب

الأستاذ نور الدين



الأستاذ نور الدين عيساوي

بالتعاون مع فريق عكاشة

المتتاليات من الألف إلى الياء

أكثر من 150 تمرينا



موافقة لفيديوهات اليوتيوب

- ملخص شامل

- مواضيع شاملة في المتتاليات

- جميع مواضيع شعبة العلوم التجريبية 2008-2020

- جميع مواضيع شعبة التقنى الرياضى 2008-2020

- جميع مواضيع شعبة الرياضيات 2008-2020

- مواضيع مقترحة

- مواضيع مقتبسة من مواضيع أجنبية

التحضير الجيد لباكوريا الجزائر

عكاشة
BOOKSTORE

We can help you
يمكننا أن نساعدك

1. ملخص شامل حول المتتاليات

01- تعريف المتتالية العددية

المتتالية العددية الحقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n)$$

02- الترميز

نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$ هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل. المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 . المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على \mathbb{N} . u_n هو الحد الذي دليله n ويسمى كذلك الحد العام للمتتالية u . u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 . u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على \mathbb{N} . أمثلة:

- المتتالية (u_n) حيث $u_n = 5n^2 + 2$ معرفة على \mathbb{N} .
- المتتالية (v_n) حيث $v_n = \frac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N} - \{0\}$ ونكتب $(v_n)_{n \geq 1}$.
- المتتالية (w_n) حيث $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ نكتب $(w_n)_{n \geq 6}$.
- في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته.

مثال: المتتالية (w_n) حيث $w_n = \frac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n \geq 6$ ، هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول. رتبة الحد u_b حيث $b \in \mathbb{N}$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b - a + 1$.

مثال: - إذا كانت المتتالية (u_n) حدها الأول u_0 فإن u_{14} يمثل الحد ذو الرتبة $14 - 0 + 1 = 15$ لأن 14 - إذا كانت المتتالية (v_n) حدها الأول v_1 فإن u_{14} يمثل الحد ذو الرتبة $14 - 1 + 1 = 14$ لأن 14

03- طرق تعريف المتتالية

- متتالية معرفة بحدها العام بدلالة دالة f مباشرة من الشكل $u_n = f(n)$ مثال: $U_n = 2n^2 + n - 1$ حيث: $F(x) = 2x^2 + x - 1$
- متتالية معرفة بصيغة تراجعية وهي على أنواع:
- متتالية تراجعية من المرتبة الأولى: $u_{n+1} = f(u_n)$ ويعطى معها الحد الأول مثال: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 5u_n + 1$ لاحظ أن $f(x) = 5x + 1$
- متتالية تراجعية من المرتبة الثانية: مثال: $u_0 = 1$ و $u_1 = 5$ و $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$
- تنبيه: توجد متتاليات من مراتب أعلى.

- متتالية معرفة بذكر القائمة الأولى من حدودها بحيث تسمح باستبيان خاصيتها.

مثال (1): 1, 3, 5, 7, 9, 11, متتالية الأعداد الفردية

مثال (2): 0, 3, 6, 9, 12, مضاعفات العدد 3

فالأولى هي (u_n) حيث $\begin{cases} u_n = 2n + 1 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ أما الثانية هي (v_n) حيث: $\begin{cases} v_n = 3n \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

04- اتجاه تغير متتالية عددية

- متتالية متزايدة:

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0

$$u_{n+1} \geq u_n \quad (u_{n+1} > u_n \text{ على الترتيب}).$$

- متتالية متناقصة:

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0

$$u_{n+1} \leq u_n \quad (u_{n+1} < u_n \text{ على الترتيب}).$$

- متتالية ثابتة:

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، $u_{n+1} = u_n$.

- متتالية رتيبة:

إذا كانت متتالية متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) أو متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) نقول أن المتتالية رتيبة (رتيبة تماما على الترتيب).

05- دراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) معرفة على \mathbb{N}

الطريقة 01: من أجل كل عدد طبيعي n

- إذا كان: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (u_n) متزايدة على \mathbb{N}

- إذا كان: $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (u_n) متناقصة على \mathbb{N}

- إذا كان: $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (u_n) ثابتة على \mathbb{N}

الطريقة 02: (u_n) مكتوبة بدلالة n أي $u_n = f(n)$

- إذا كانت f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ فإن (u_n) متزايدة على \mathbb{N} .

- إذا كانت f متناقصة على المجال $[0; +\infty[$ فإن (u_n) متناقصة على \mathbb{N} .

- إذا كانت f ثابتة على المجال $[0; +\infty[$ فإن (u_n) ثابتة على \mathbb{N} .

ملاحظة: عكس الخاصية غير صحيح.

الطريقة 03: تستعمل إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماما

- إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإن (u_n) متزايدة على \mathbb{N} .

- إذا كانت: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فإن (u_n) متناقصة على \mathbb{N} .

- إذا كان: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ فإن (u_n) ثابتة على \mathbb{N} .

06- المتتالية المحدودة

تعريف: (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}
 - القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n
 $u_n \leq A$
 نقول أن A عنصر حاد من الأعلى.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n
 $u_n \geq B$
 نقول أن B عنصر حاد من الأسفل.

- القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى ومن الأسفل. حيث من أجل كل عدد طبيعي n
 $B \leq u_n \leq A$
 ونقول أن A عنصر حاد من الأعلى و B عنصر حاد من الأسفل.

07- نهاية متتالية عددية

(u_n) متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي.
 ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ أو $\lim u_n = \ell$ (حيث أن النهاية لا تحسب إلا عند $+\infty$): نقول أن المتتالية (u_n) تقبل ℓ كنهاية إذا وفقط إذا كان كل مجال مفتوح يشمل ℓ يشمل أيضا كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة وفي هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة، إذا لم تكن المتتالية (u_n) متقاربة نقول أنها متباعدة.
 ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$: نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $+\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح $[\alpha; +\infty[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة.
 ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$: نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي $-\infty$ يعني أن كل مجال مفتوح $]-\infty; \alpha]$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) يشمل كل حدود المتتالية (u_n) ابتداء من رتبة معينة.
 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال من الشكل $[\alpha; +\infty[$ و α عدد حقيقي.

❖ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \ell$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ (والعكس غير صحيح)
 ❖ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
 ❖ إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = -\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

- نهاية متتالية عددية باستعمال الحصر

❖ **مبرهنة 1:** $(w_n), (v_n), (u_n)$ ثلاث متتاليات عددية و ℓ عدد حقيقي

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ وإذا كان ابتداء من عدد طبيعي n_0 ، $v_n \leq u_n \leq w_n$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

❖ **مبرهنة 2:** (v_n) و (u_n) متتاليتان عدديتان، إذا كان ابتداء من عدد طبيعي n_0 ،

$$u_n \geq v_n \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

❖ **مبرهنة 3:** (v_n) و (u_n) متتاليتان عدديتان، إذا كان ابتداء من عدد طبيعي n_0 ،

$$u_n \leq v_n \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$

08- التقارب والتباعد

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية و ℓ عدد حقيقي ثابت.

❖ نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة إذا كانت:

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ونقول أنها متقاربة نحو ℓ .

• (u_n) متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى.

• (u_n) متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل.

❖ نقول أن المتتالية (u_n) متباعدة إذا كانت:

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ وعندئذ نقول أنها متباعدة نحو $+\infty$.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ وعندئذ نقول أنها متباعدة نحو $-\infty$.

• نهاية (u_n) غير موجودة.

09- التجاور

- تعريف: تكون (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداها متزايدة والأخرى

متناقصة ونهاية الفرق بينهما يؤول إلى الصفر.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

- مبرهنة: إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان متجاورتان فلهما متقاربتان ولهما نفس النهاية.

10- الاستدلال بالتراجع

مسلمة: $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n ، n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

1- نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

2- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$

(فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

3- النتيجة: عند انتهاء المرحلتين نقر أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو

يساوي n_0 .

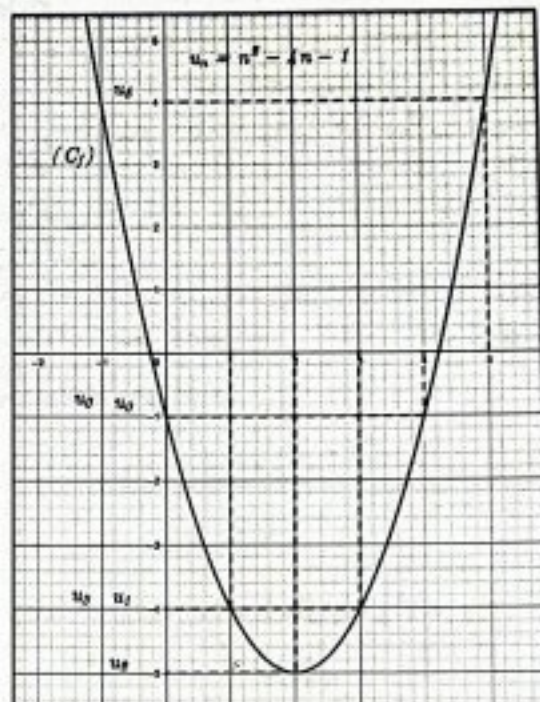
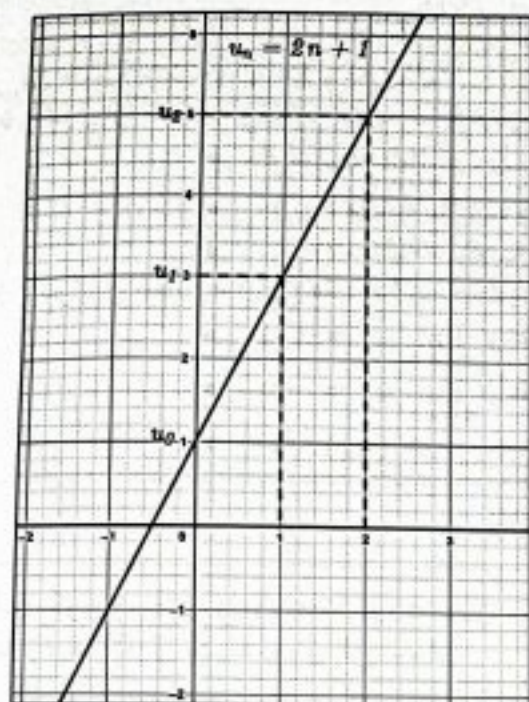
❖ ملاحظة: المراحل الثلاثة في الاستدلال بالتراجع ضرورية وغياب واحدة منها "مخل" بشروط عمله.

11- التمثيل البياني

❖ متتالية معرفة بحددها العام بدلالة دالة f مباشرة من الشكل $u_n = f(n)$

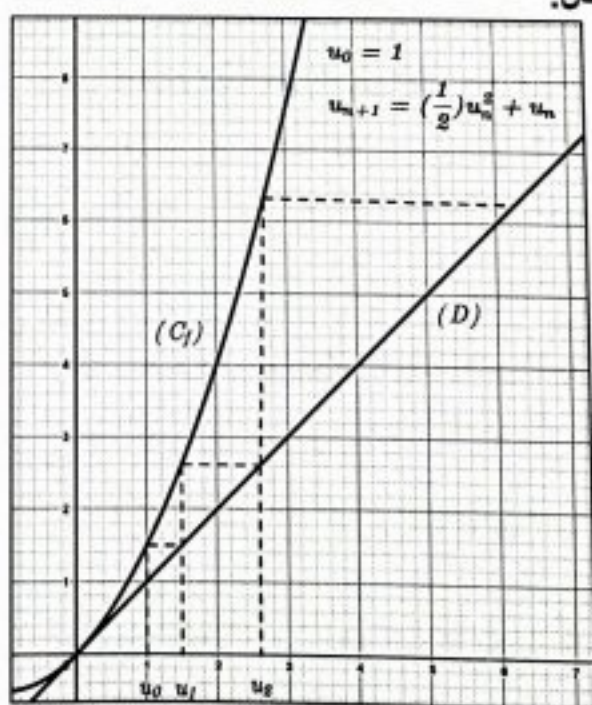
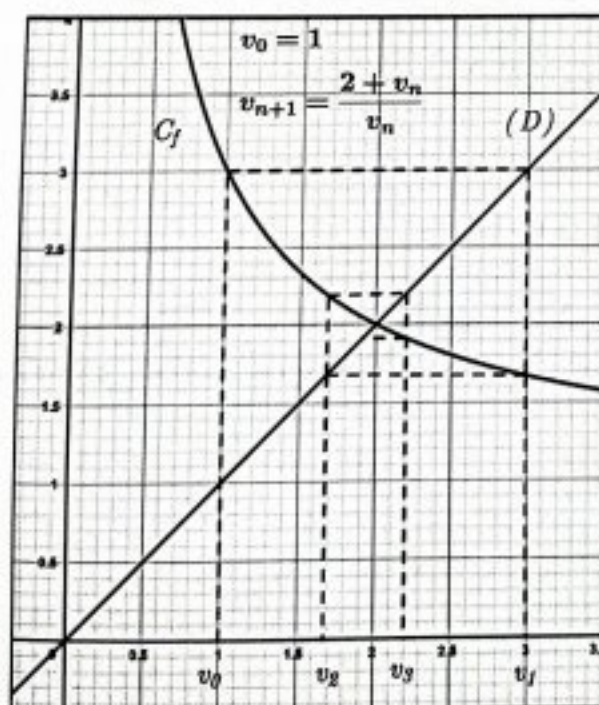
في معلم للمستوي يتم تمثيل حدود المتتالية (u_n) على محور الترتيب حسب قيم n وذلك بعد التعويض المباشر

مثال:



- ❖ التمثيل البياني للمتتالية العددية المعرفة بعلاقة تراجعية من الدرجة الأولى $u_{n+1} = f(u_n)$ في معلم للمستوي يتم تمثيل حدود المتتالية (u_n) على محور الفواصل ونتبع الخطوات التالية:
- ننشئ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$.
 - ننشئ u_0 على محور الفواصل.
 - ننشئ النقطة A_0 من المنحنى (C_f) ذات الفاصلة u_0 .
 - ننشئ النقطة B_0 من المستقيم (D) ذات نفس ترتيب النقطة A_0 .
 - ننشئ على محور الفواصل u_1 فاصلة النقطة B_0 .
 - بنفس الأنساق السابقة نعيد نفس العمل بدءاً من u_1 لإنشاء u_2 وهكذا لإنشاء u_3, u_4, \dots

مثال:



| المتتالية الحسابية | المتتالية الهندسية |
|---|---|
| نقول أن (u_n) متتالية حسابية أساسها r (عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n | نقول أن (v_n) متتالية هندسية أساسها q (عدد حقيقي غير معدوم) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n |
| $u_{n+1} = u_n + r$ | $v_{n+1} = v_n \times q$ |
| - عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية | - عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية |
| إذا كانت (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_p وأساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين p و $n \geq p$ حيث p يمثل رتبة الحد الأول يكون: | إذا كانت (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_p وأساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين p و $n \geq p$ حيث p يمثل رتبة الحد الأول يكون: |
| $u_n = u_p + (n - p)r$ | $v_n = v_p \times q^{n-p}$ |
| حالة خاصة $u_n = u_0 + nr$ إذا كان حدها الأول u_0 | حالة خاصة $v_n = v_0 \times q^n$ إذا كان حدها الأول v_0 |
| - مجموع الحدود المتتالية الحسابية | - مجموع الحدود المتتالية الهندسية |
| بصفة عامة: | بصفة عامة: |
| $S = (\text{عدد الحدود}) \times \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right)$ | $S = (\text{عدد الحدود}) \times \left(\frac{1 - \text{الأساس}}{1 - \text{الأساس}} \right)$ |
| $S = (n - p + 1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$ | $S = (v_p) \times \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$ |
| مثال: | مثال: |
| $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$ | $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n = v_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$ |
| حالة خاصة إذا كان $q = 1$ فإن: | حالة خاصة إذا كان $q = 1$ فإن: |
| $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1)u_0$ | $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n = (n + 1)v_0$ |
| - الوسط الحسابي: | - الوسط الهندسي: |
| إذا كانت a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة يسمى b وسط حسابي ويكون $2b = a + c$ ومنه نجد: | إذا كانت a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة يسمى b وسط هندسي ويكون $b^2 = ac$ ومنه نجد: |
| $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$ | $v_n^2 = v_{n-1} \times v_{n+1}$ |
| - اتجاه تغير المتتالية الحسابية | - اتجاه تغير المتتالية الهندسية |
| (u_n) متتالية حسابية أساسها r : | (v_n) متتالية هندسية أساسها q : |
| إذا كان $r > 0$ فإن (u_n) متزايدة تماماً. | إذا كان $q > 1$ فإن (v_n) متزايدة تماماً. |
| إذا كان $r < 0$ فإن (u_n) متناقصة تماماً. | إذا كان $0 < q < 1$ فإن (v_n) متناقصة تماماً. |
| إذا كان $r = 0$ فإن (u_n) ثابتة. | إذا كان $q = 1$ فإن (v_n) متتالية ثابتة. |
| | الحالة الثالثة: $0 < q < 1$ |
| | إذا كان $q < 0$ فإن (v_n) متزايدة تماماً. |
| | الحالة الرابعة: $q < 0$ فإن (v_n) ليست رتيبة لا يمكن دراستها. |

| نهاية متتالية هندسية | نهاية المتتالية الحسابية |
|---|--|
| <p>- (v_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه:</p> <p>1- إذا كان $1 < q < -1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ (متتالية متقاربة).</p> <p>2- إذا كان $q = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_0$ (متتالية متقاربة).</p> <p>3- إذا كان $q > 1$ فإنه:</p> <p>- إذا كان $v_0 > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (متتالية متباعدة).</p> <p>- إذا كان $v_0 < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ (متتالية متباعدة).</p> <p>4- إذا كان $q \leq -1$ النهاية غير موجودة. (متتالية متباعدة).</p> | <p>- (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه:</p> <p>1- إذا كان $0 < r < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (متتالية متباعدة).</p> <p>2- إذا كان $0 < r < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ (متتالية متباعدة).</p> <p>3- إذا كان $0 = r$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$ (متتالية متقاربة).</p> |