

**REPUBLIQUE TUNISIENNE  
MINISTERE DE L'EDUCATION**

\*\*\*\*

**CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES**

\*\*\*\*

**PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES**

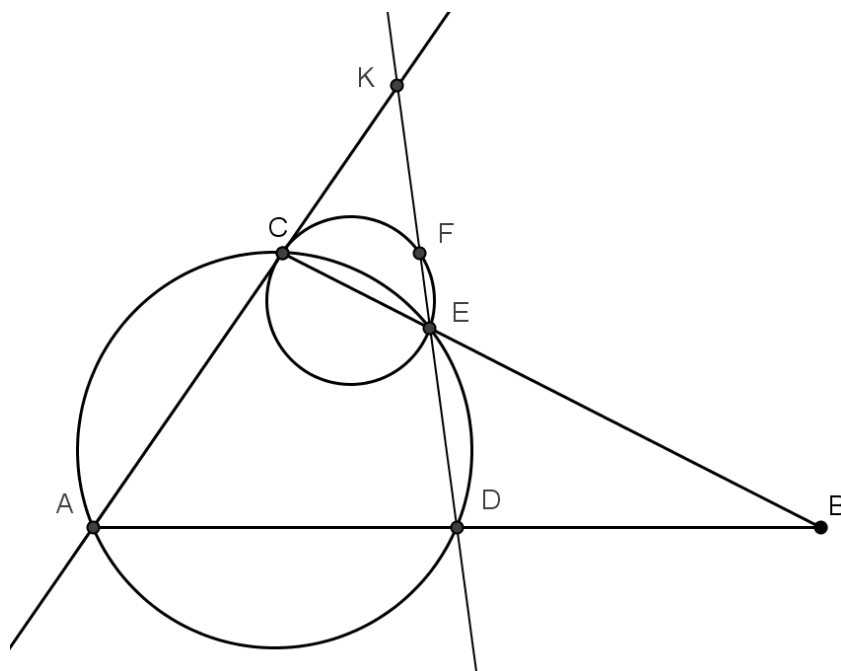
\*\*\*\*

**Session : AVRIL 2011 \*\*\*\* Durée : 4 Heures**

**EXERCICE 1**

Un cercle passant par les sommets A et C d'un triangle ABC coupe [AB] en son milieu D et [BC] en un point E. Le cercle passant par E et tangent à la droite (AC) en C recoupe la droite (DE) en un point F. Soit K l'intersection de (AC) et (DE). ( voir figure ci-dessous)

Montrer que les droites (CF), (AE) et (BK) sont concourantes.



**EXERCICE 2**

Soit ABCD un carré de côté 1. On considère les points E, F, G et H respectivement sur les côtés [ AB] , [BC] , [CD] et [DA] .

1) Montrer que  $EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \leq 4$

2) a) Montrer que  $AE^2 + EB^2 \geq \frac{1}{2}$

b) En déduire que  $EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \geq 2$

**EXERCICE 3**

Trouver tous les nombres réels  $x$  tels que :  $x = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}$

**EXERCICE 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0,1]$  par  $f(x) = x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}$  où  $a$  est un paramètre réel.

Donner les valeurs de  $a$  telles que pour tout  $x \in [0,1]$  ;  $|f(x)| \leq 1$

**EXERCICE 5**

Soit  $E$  un ensemble de 17 entiers naturels :  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{17}$  (distincts ou non).

Montrer qu'il existe une partie de  $E$  dont la somme de ses éléments est un multiple de 17.

(On pourra considérer les sommes  $S_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i$  avec  $1 \leq i \leq 17$ )