

**I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH ( 7 điểm)**

**Câu 1 ( 2,0 điểm ).** Cho hàm số  $y = x^3 - mx^2 + 4$  (1)

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi  $m=3$ .  
b) Tìm  $m$  để đồ thị hàm số (1) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

**Câu 2 ( 1,0 điểm ).** Giải phương trình:  $(1 + \tan x)(2 \cos 2x - 1) = 2\sqrt{2} \cos 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

**Câu 3 ( 1,0 điểm ).** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x^2 + 2)\sqrt{y+1} - (y+2)\sqrt{x^2+1} = 0 \\ x^4 - y^2 - 3x^2y - 5y + 8 = 0 \end{cases}$$

**Câu 4 ( 1,0 điểm ).** Tính tích phân:  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3 \cot x + 1} + x}{\sin^2 x} dx$

**Câu 5(1,0 điểm ).** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, góc  $BAC = 120^\circ$ . Gọi H, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC, SH vuông góc với (ABC),  $SA=2a$  và tạo với mặt đáy góc  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BC.

**Câu 6(1,0 điểm).** Cho các số dương  $x, y$  phân biệt thỏa mãn:  $x^2 + 2y = 12$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{x^4} + \frac{4}{y^4} + \frac{5}{8(x-y)^2}$$

**II. PHẦN RIÊNG( 3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần ( phần A hoặc phần B)**

**A. Theo chương trình chuẩn**

**Câu 7a ( 1,0 điểm ).** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại B,  $AB = 2BC$ . Gọi D là trung điểm của AB, E nằm trên đoạn thẳng AC sao cho  $AC = 3EC$ . Biết phương trình đường thẳng chứa CD là  $x - 3y + 1 = 0$  và điểm  $E\left(\frac{16}{3}; 1\right)$ . Tìm tọa độ các điểm A, B, C.

**Câu 8a ( 1,0 điểm ).** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho  $A(0;0;3)$ ,  $M(1;2;0)$ . Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM.

**Câu 9a ( 1,0 điểm ).** Cho khai triển nhị thức:

$$(3^x + 3^{2-x})^n = C_n^0 (3^x)^n + C_n^1 (3^x)^{n-1} \cdot 3^{2-x} + C_n^2 (3^x)^{n-2} \cdot (3^{2-x})^2 + \dots + C_n^n (3^{2-x})^n, \text{ với } n \text{ là số nguyên dương}$$

Biết rằng trong khai triển đó  $C_n^{n-2} = 4C_n^1$  và số hạng thứ 5 bằng  $126 \cdot 3^{n+1}$ . Tìm  $n$  và  $x$ .

**B. Theo chương trình nâng cao**

**Câu 7b ( 1,0 điểm ).** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):  $x^2 + y^2 = 63$ . Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn (C) và hai tiêu điểm cùng với một đỉnh của (E) tạo thành tam giác đều.

**Câu 8b ( 1,0 điểm ).** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm  $A(1;1;1)$ ,  $B(2;3;-1)$ , đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$  và mặt phẳng (P):  $x - y - z + 2 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng d cắt (P) tại C, cắt

$\Delta$  tại D sao cho ABCD là hình thang vuông tại A và B.

**Câu 9b ( 1,0 điểm ).** Cho số phức  $z$  thỏa mãn:  $(z-1)(4-2i) = (3+i)(\bar{z}+2i)$ . Tìm phần ảo của số phức

$$w = (z + \sqrt{3} - 1)^9$$

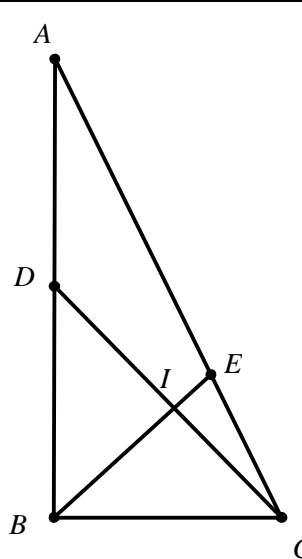
-----HẾT-----

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Câu	Nội dung	Điểm																					
1a	<p>a) Khi <math>m=3</math> ta có hàm số: <math>y = x^3 - 3x^2 + 4</math></p> <p>1) TXĐ: <math>D=\mathbb{R}</math></p> <p>2) Sự biến thiên:</p> <p>+Giới hạn: <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty</math>; <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty</math></p> <p>+ Chiều biến thiên:</p> $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ <p>+ Bảng biến thiên:</p> <table><tr><td>x</td><td><math>-\infty</math></td><td>0</td><td>2</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td>0</td><td></td><td><math>+\infty</math></td></tr></table> <p>Hàm số đồng biến trên các khoảng <math>(-\infty;0)</math> và <math>(2;+\infty)</math></p> <p>Hàm số nghịch biến trên khoảng <math>(0;2)</math></p> <p>Hàm số đạt cực đại tại <math>x=0</math>; <math>y_{CD}=4</math>; hàm số đạt cực tiểu tại <math>x=2</math>; <math>y_{ct}=0</math>.</p> <p>3) Đồ thị</p>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'		+	0	-	0	+		y			4		0		$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$																		
	y'		+	0	-	0	+																
	y			4		0		$+\infty$															
			0,25																				
		0,25																					
		0,25																					
		0,25																					
1b	<p>b) Tìm <math>m</math> để đồ thị hàm số (1) cắt trục <math>Ox</math> tại 3 điểm phân biệt .</p>	1.0																					
	<p>Xét phương trình hoành độ giao điểm:</p> $x^3 - mx^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow mx^2 = x^3 + 4 \quad (2)$ <p>Nếu <math>x=0</math> phương trình vô nghiệm.</p> <p>Nếu <math>x \neq 0</math> phương trình tương đương với: <math>m = x + \frac{4}{x^2}</math></p> <p>Xét hàm số <math>f(x) = x + \frac{4}{x^2}</math> với <math>x \neq 0</math></p>	0,25																					

	$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ <p>Lập bảng biến thiên của hàm số <math>y=f(x)</math> kết luận <math>m&gt;3</math></p> <p><b>Cách khác:</b>  Đồ thị hàm số (1) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt khi hàm số có cực đại, cực tiểu và <math>y_{CD} \cdot y_{CT} &lt; 0</math></p>	0,25 0,5
2	<b>Giải phương trình:</b> $(1 + \tan x)(2 \cos 2x - 1) = 2\sqrt{2} \cos 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$	1.0
	<p>ĐK: <math>\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi</math></p> <p>Với điều kiện trên phương trình tương đương:  <math>(\sin x + \cos x)(2 \cos 2x - 1) = 2 \cos 3x \cdot \cos x \cdot (\sin x + \cos x)</math>  <math>\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \cos 2x - 1 - 2 \cos 3x \cdot \cos x) = 0</math>  <math>\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \cos^2 2x - \cos 2x) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 2 \cos^2 2x - \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}</math></p>	0,25  0,25  0,5
3	<b>Giải hệ phương trình:</b> $\begin{cases} (x^2 + 2)\sqrt{y+1} - (y+2)\sqrt{x^2+1} = 0 & (1) \\ x^4 - y^2 - 3x^2y - 5y + 8 = 0 & (2) \end{cases}$	1.0
	<p>Điều kiện: <math>y \geq -1</math></p> <p>Từ phương trình (2) ta có: <math>x^4 + 8 = (3x^2 + 5 + y)y</math>. Suy ra <math>y &gt; 0</math></p> <p>Khi đó phương trình (1)  <math>\Leftrightarrow (x^2 + 2)\sqrt{y+1} = (y+2)\sqrt{x^2+1}</math>  <math>\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{y+2}{\sqrt{y+1}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{y+1} + \frac{1}{\sqrt{y+1}}</math></p> <p>Phương trình có dạng: <math>f(\sqrt{y+1}) = f(\sqrt{x^2+1})</math> trong đó hàm <math>f(t) = t + \frac{1}{t}</math> (<math>t \geq 1</math>)</p> <p>Ta có: <math>f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2} \geq 0</math> (<math>t \geq 1</math>) nên hàm số <math>f(t)</math> đồng biến trên <math>[1; +\infty)</math></p> <p>Do đó <math>f(\sqrt{y+1}) = f(\sqrt{x^2+1}) \Leftrightarrow y = x^2</math>.</p> <p>Thay vào (2) ta được nghiệm của hệ phương trình là <math>(x;y)</math>: <math>(1;1)</math> hoặc <math>(-1;1)</math></p>	0,25   0,25  0,25
	<p>Chú ý: Có thể xét hàm số <math>f(t) = \frac{t+2}{\sqrt{t+1}}</math> (<math>t \geq 0</math>) hoặc sử dụng ẩn phụ như sau:</p> <p>Đặt <math>\begin{cases} a = \sqrt{x^2+1} \\ b = \sqrt{y+1} \end{cases}</math> <math>a \geq 1; b &gt; 1</math>. Khi đó phương trình (1) trở thành:</p> <p><math>(b^2+1)a - (a^2+1)b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = 1 \text{ (loại)} \end{cases}</math></p> <p>Từ đó ta có nghiệm hệ phương trình.</p>	



6.	<p><b>Cho các số dương x, y phân biệt thỏa mãn: <math>x^2 + 2y = 12</math>. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:</b></p> $P = \frac{4}{x^4} + \frac{4}{y^4} + \frac{5}{8(x-y)^2}$	1.0
	<p>Từ giả thiết ta có: <math>16 = (x^2 + 4) + 2y \geq 4x + 2y \geq 2\sqrt{4x \cdot 2y} \Rightarrow 0 &lt; xy \leq 8</math></p> <p>Do đó: <math>P \geq \frac{x^2 y^2}{64} \left( \frac{4}{x^4} + \frac{4}{y^4} \right) + \frac{xy}{8} \cdot \frac{5}{8(x-y)^2} = \frac{1}{16} \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{5}{64} \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}</math></p> <p>Đặt <math>t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}</math> (<math>t &gt; 2</math>) và <math>P \geq \frac{1}{16} t^2 + \frac{5}{64} \frac{1}{t-2} - \frac{1}{8}</math></p> <p>Xét hàm số: <math>f(t) = \frac{1}{16} t^2 + \frac{5}{64} \frac{1}{t-2} - \frac{1}{8}</math> trên khoảng <math>(2; +\infty)</math></p> <p>Ta có <math>f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}</math> và <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty</math>; <math>\lim_{x \rightarrow 2^+} f(t) = +\infty</math></p> <p>nên <math>\min_{(2; +\infty)} f(t) = \frac{27}{64}</math> khi <math>t = 5/2</math></p> <p>Suy ra <math>\min P = \frac{27}{64}</math> khi <math>x=2, y=4</math></p>	0,25 0,25 0,25
7a	<p><b>Trong mặt phẳng với hệ tọa độ <math>Oxy</math>, cho tam giác <math>ABC</math> vuông tại <math>B</math>, <math>AB = 2BC</math>. Gọi <math>D</math> là trung điểm của <math>AB</math>, <math>E</math> nằm trên đoạn thẳng <math>AC</math> sao cho <math>AC = 3EC</math>. Biết phương trình đường thẳng chứa <math>CD</math> là <math>x - 3y + 1 = 0</math> và điểm <math>E\left(\frac{16}{3}; 1\right)</math>. Tìm tọa độ các điểm <math>A, B, C</math>.</b></p>	1.0
	<p>Gọi <math>I = BE \cap CD</math>, đặt <math>BC = c &gt; 0</math></p> <p>Ta có <math>\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC}</math> nên <math>E</math> là chân đường phân giác trong góc <math>B</math> của tam giác <math>ABC</math>.</p> <p>Do đó, <math>\angle CBE = 45^\circ \Rightarrow BE \perp CD</math> (Vì <math>\triangle BCD</math> vuông cân tại <math>B</math>).</p> 	0,25
	<p>PT của <math>BE: 3x + y - 17 = 0</math></p> <p>Tọa độ điểm <math>I</math> thỏa mãn hệ <math>\begin{cases} 3x + y - 17 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow I(5; 2)</math>.</p> <p>Ta có <math>BI = CI = \frac{c}{\sqrt{2}}, CE = \frac{1}{3} AC = \frac{c\sqrt{5}}{3} \Rightarrow IE = \sqrt{CE^2 - CI^2} = \frac{c}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{IB} = -3\overline{IE}</math></p> <p>Từ đó tìm được tọa độ điểm <math>B(4; 5)</math>.</p>	0,25
	<p>Gọi <math>C(3a-1; a)</math> ta có</p> $BC = \sqrt{2}BI = 2\sqrt{5} \Rightarrow (3a-5)^2 + (a-5)^2 = 20 \Leftrightarrow 10a^2 - 40a + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 3 \end{cases}$	0,25
	<p>Với <math>a = 1 \Rightarrow C(2; 1), A(12; 1)</math>; Với <math>a = 3 \Rightarrow C(8; 3), A(0; -3)</math></p>	0,25

8a	Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(0;0;3)$ , $M(1;2;0)$ . Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM.	1.0
	Do $B \in Ox, C \in Oy$ nên tọa độ của B và C có dạng: $B(b; 0; 0)$ và $C(0; c; 0)$ .	0,25
	Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, suy ra: $G\left(\frac{b}{3}; \frac{c}{3}; 1\right)$ .	0,25
	Ta có $\overline{AM} = (1; 2; -3)$ nên đường thẳng AM có phương trình $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ .	0,25
	Do G thuộc đường thẳng AM nên $\frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{-2}{-3}$ . Suy ra $b = 2$ và $c = 4$ .	
	Do đó phương trình của mặt phẳng (P) là $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$ , nghĩa là (P): $6x + 3y + 4z - 12 = 0$ .	0,25
9a	Cho khai triển nhị thức: $(3^x + 3^{2-x})^n = C_n^0 (3^x)^n + C_n^1 (3^x)^{n-1} \cdot 3^{2-x} + C_n^2 (3^x)^{n-2} \cdot (3^{2-x})^2 + \dots + C_n^n (3^{2-x})^n$ với n là số nguyên dương. Biết rằng trong khai triển đó $C_n^{n-2} = 4C_n^1$ và số hạng thứ 5 bằng $126 \cdot 3^{n+1}$ . Tìm n và x.	1.0
	Từ giả thiết: $C_n^{n-2} = 4C_n^1 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} = 4 \frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow n = 9$	0,5
	Số hạng thứ 5 là: $C_9^4 (3^x)^5 \cdot (3^{2-x})^4 = 126 \cdot 3^{x+8} = 126 \cdot 3^{10} \Leftrightarrow x = 2$	0,5
7b	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 63$ . Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn (C) và hai tiêu điểm cùng một đỉnh của (E) tạo thành tam giác đều.	1.0
	Giả sử phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ Hình chữ nhật cơ sở có 2 kích thước là 2a, 2b nội tiếp đường tròn (C) nên ta có: $a^2 + b^2 = 63 \quad (1)$ Hai tiêu điểm và đỉnh trên trục tung tạo thành tam giác đều nên ta có $b = \sqrt{3}c$ Do đó: $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = 4c^2$ Vậy: $4c^2 + 3c^2 = 63 \Leftrightarrow c^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 36 \\ b^2 = 27 \end{cases}$ Do đó phương trình (E) là: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$	0,25 0,25 0,5
8b	Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;1)$ , $B(2;3;-1)$ , đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng (P): $x - y - z + 2 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng d cắt (P) tại C, cắt $\Delta$ tại D sao cho ABCD là hình thang vuông tại A và B.	1.0
	Do D thuộc $\Delta$ nên $D(1+t; t; -1+2t)$ ; $\overline{AB} = (1; 2; -2)$ ; $\overline{AD} = (t; t-1; 2t-2)$ TBR ta có: $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow D(3; 2; 3)$	0,25
	Từ đó ta có vtcp của BC là $\overline{AD} = (2; 1; 2)$ , phương trình BC: $\begin{cases} x = 2 + 2a \\ y = 3 + a \\ z = -1 + 2a \end{cases}$	0,25

	<p>Suy ra <math>C(2+2a;3+a;-1+2a)</math>. Mà <math>C</math> thuộc <math>(P)</math> nên: <math>a=2</math>, suy ra <math>C(6;5;3)</math></p> <p>Khi đó phương trình cần tìm là: <math display="block">\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}</math></p>	0,25
		0,25
<b>9b</b>	<p><b>Cho số phức <math>z</math> thỏa mãn: <math>(z-1)(4-2i) = (3+i)(\bar{z}+2i)</math>. Tìm phần ảo của số phức</b></p> <p><b><math>w = (z + \sqrt{3} - 1)^9</math></b></p>	<b>1.0</b>
	<p>Giả sử số phức <math>z = a + bi</math> (<math>a, b \in \mathbb{R}</math>)</p> <p>Từ giả thiết ta có <math>(4a + 2b - 4) + (4b - 2a + 2)i = (3a + b - 2) + (a - 3b + 6)i</math></p> <p>Suy ra hệ phương trình: <math display="block">\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a - 7b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}</math></p> <p>Vậy <math>z = 1 + i</math></p> <p>Khi đó: <math>w = (1 + i + \sqrt{3} - 1)^9 = (\sqrt{3} + i)^9 = 2^9 \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = -2^9 i</math></p> <p>Phần ảo của <math>w</math> là <math>-2^9</math></p>	0,25
		0,25
		0,25
		0,25

Cảm ơn bạn **Hưng Hoàng** ( [hoanggiahung.bdh@gmail.com](mailto:hoanggiahung.bdh@gmail.com) ) đã gửi tới [www.laisac.page.tl](http://www.laisac.page.tl)