

2009/ 09

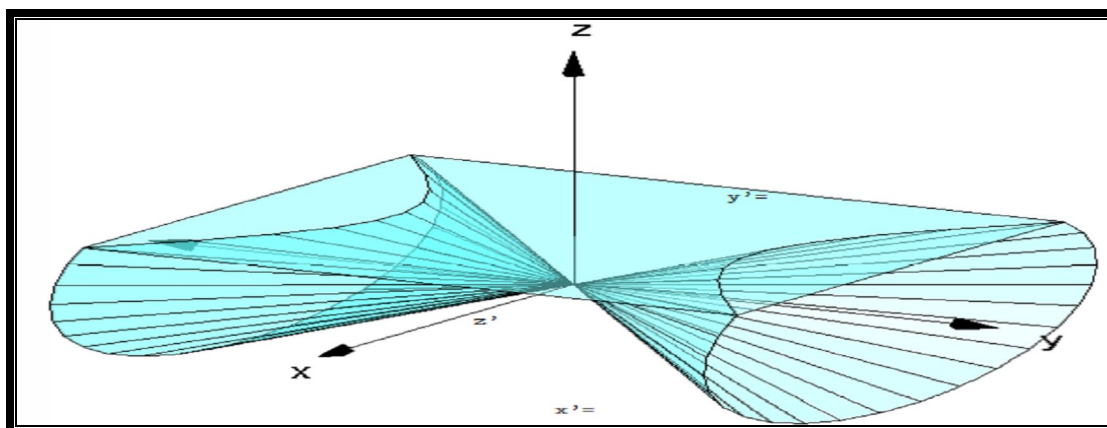
**UNIVERSIDADE ZAMBEZE / BEIRA**

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA / ENGENHARIA INFORMÁTICA

GRUPO – 1 / P2

# CURVAS DE SEGUNDA ORDEM

## HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA



**NOME DOS ESTUDANTES:**

**APELIDO**

**NOME**

**Mateus**  
**Ossemame**  
**Mireia**  
**Pereira**  
**Naife**  
**Lopes**

Arlindo de Lemos Frederico  
Maqbul Ahmad  
Miro Marcelino  
Milton Emerson  
Arsénio Deluvio  
Damasceno

**DOCENTE:**

*dr. Inácio Xavier Bute*

# ÍNDICE

## Prefácio.

## 1.0 - FORMAS QUADRÁTICAS E CÓNICAS

- Definição 1.1
  - Exemplo 1.1
  - Figura 1.1
  - Exemplo 1.2
  - Figura 1.2
  - Exemplo 1.3
  - Figura 1.3
  - Exemplo 1.4
  - Figura 1.4
  - Exemplo 1.5
  - Figura 1.5
  - Figura 1.6

## 1.2 – QUÁDRICAS

- Definição 1.2
  - Tabela 1.1
  - Figura 1.7
  - Exemplo 1.5

## 1.3 - HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA

- Exemplo 1.5

## PREFÁCIO

Este seguinte trabalho foi ampliado de forma a poder expor e explicar melhor o tema visto que este fica somente esclarecido no entender do Grupo – 1 da turma de Engenharia Informática da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Zambeze - P2.

Começando pelo tema de enfoque **Formas Quadráticas e Cónicas**.

Optando por apresentar um texto de carácter expositivo – explicativo o trabalho esta maioritariamente composto por exemplos e figuras na qual a sua explicação o torna mais compreensivo.

Contudo expomos o seguinte trabalho e com muito apresso que aceitamos criticas e sugestões.

## 1.0 - FORMAS QUADRÁTICAS E CÓNICAS

Para entendermos formas quadráticas e cónicas estudaremos agora equações em duas variáveis que representam um tipo especial de curva, e veremos como a teoria de autovalores e autovectores pode nos ajudar a esboçar tais curvas.

### Definição 1.1:

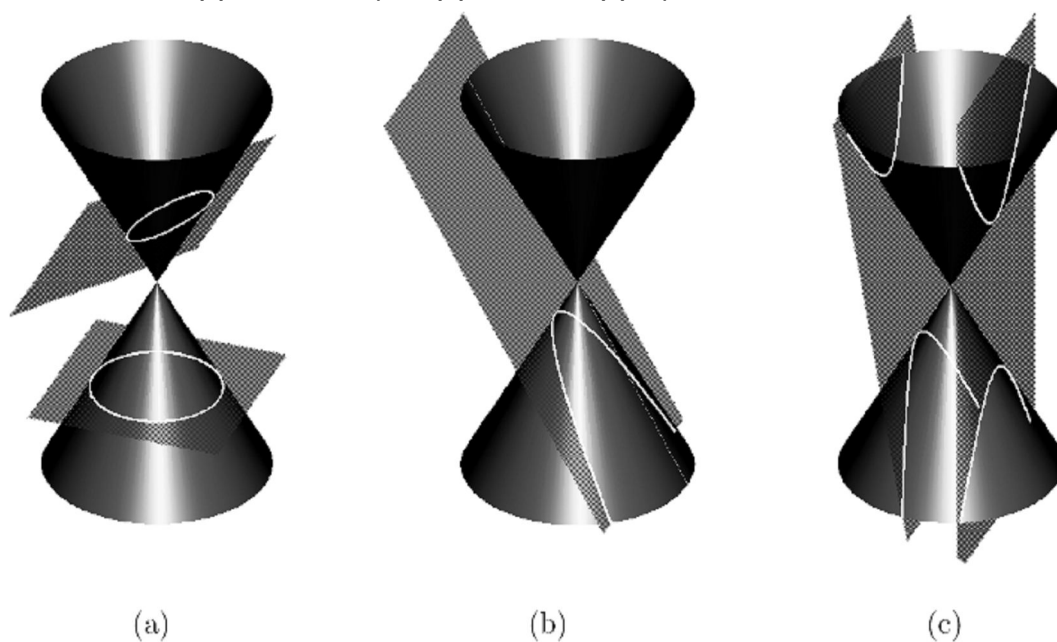
Uma **equação quadrática** é uma equação da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Em que **a**, **b** e **c** não são todos nulos.

O gráfico de uma equação quadrática (isto é, o conjunto de pontos  $(x, y)$  do plano que satisfazem a equação) é chamado *secção cónica* (ou simplesmente *cónica*), pois é uma curva que pode ser obtida através da intercepção de um cone (duplo) com um plano. Dependendo da posição relativa do plano, obtemos um círculo, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, conforme mostra a figura 1.1.

**Figura 1.1:** As secções cónicas são obtidas através da intercepção de um plano com um cone. (a) Círculo e elipse; (b) Parábola; (c) Hipérbole.



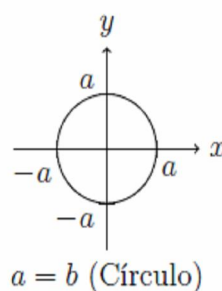
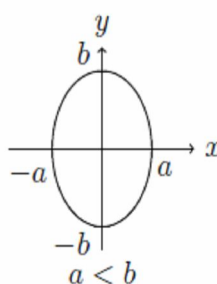
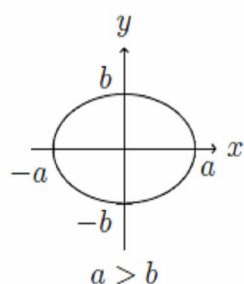
(Na verdade, um círculo é apenas um caso particular de uma elipse, mas o consideraremos separadamente por ser comum e importante.)

Se o plano passa pelo vértice do cone, obtemos apenas um ponto, uma recta ou duas rectas.

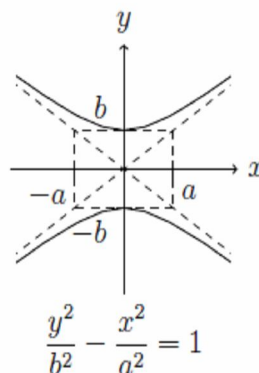
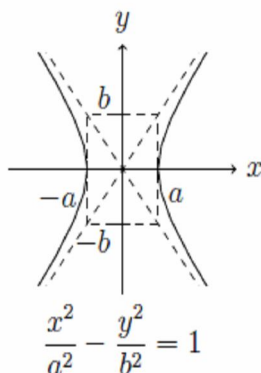
- Essas são as chamadas **cônicas degeneradas**.
- Uma cônica está em sua **posição padrão** em relação aos eixos coordenados quando sua equação está expressa em uma das formas mostradas na figura 1.2.

**Figura 1.2:** Cônicas na posição padrão.

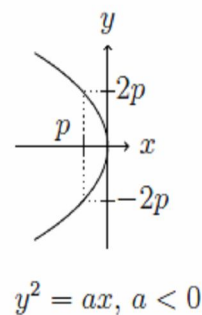
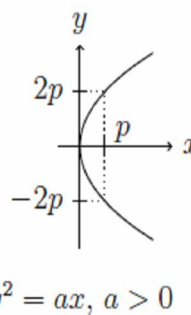
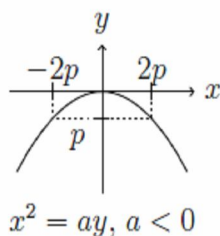
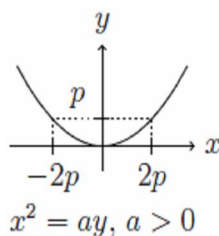
Elipse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Hipérbole



Parábola



OBS:  $p = \frac{a}{4}$

**Exemplo 1.1:**

Identifique e esboce a cônica

$$4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$$

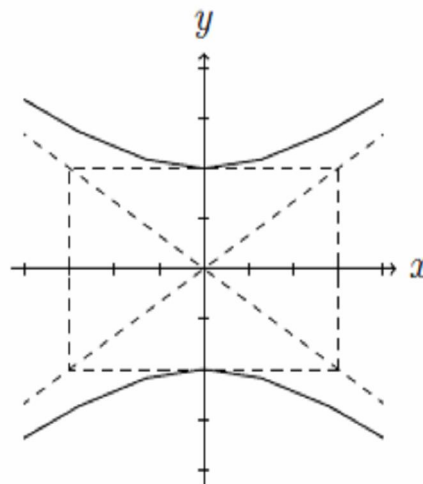
**Solução:**

Dividindo a equação por 36, temos

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Reconhecemos esta equação como a equação de uma hipérbole que se abre sobre o eixo  $y$  e que cruza o eixo  $y$  em  $(0, 2)$  e  $(0, -2)$ . A cônica está mostrada na figura 1.3.

**Figura 1.3:** Hipérbole do exemplo 1.1.



Quando numa equação quadrática temos termos  $x$  e  $y$ , a cônica não está em sua posição padrão, e foi transladada e/ou rotacionada. Quando não temos o termo misto  $xy$ , ela foi apenas transladada, e podemos esboçá-la completando os quadrados:

**Exemplo 1.2:**

Identifique e esboce o gráfico de:

$$9x^2 + y^2 - 36x - 6y + 36 = 0$$

**Solução:**

Agrupamos os termos em  $x$  e em  $y$ :

$$(9x^2 - 36x) + (y^2 - 6y) + 36 = 0$$

$$9(x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) = -36$$

Agora completamos os quadrados nas expressões nos parênteses para obter

$$9(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -36 + 36 + 9$$

$$9(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

Fazemos agora a substituição

$$\dot{x} = x - 2, \dot{y} = y - 3$$

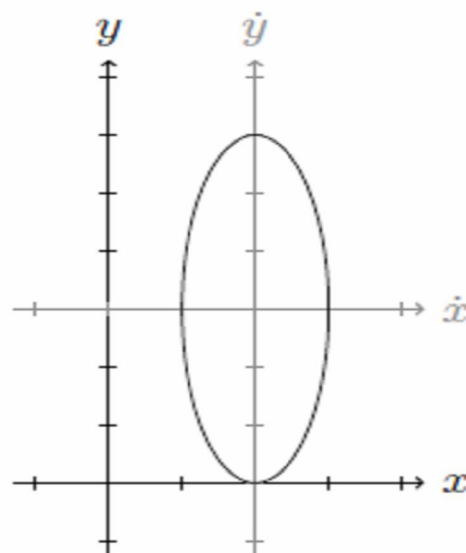
E teremos:

$$9\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9 \quad \text{ou} \quad \frac{\dot{x}^2}{1} + \frac{\dot{y}^2}{9} = 1$$

Essa é a equação de uma elipse com centro na origem do sistema de coordenadas  $(\dot{x}, \dot{y})$ .

O eixo  $\dot{x}$  é o conjunto de pontos em que  $\dot{y} = 0$ , isto é, em que  $y - 3 = 0$ , de forma que coincide com a recta  $y = 3$ . Em outras palavras, a origem foi deslocada três unidades para cima. Da mesma maneira o eixo  $\dot{y}$  é a recta  $x = 2$ . A origem do sistema  $\dot{x}\dot{y}$  é  $(2, 3)$ , então temos a hipérbole mostrada na figura 1.4.

**Figura 1.4:** Elipse do exemplo 10.2.



Se na equação quadrática existir o termo misto  $xy$ , a cónica foi rotacionada. Para ver como podemos então esboçar a cónica, observe que a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Ou

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{x} + f = 0$$

Onde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar apenas a primeira parte da equação,

$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ . O termo misto não existirá se  $\mathbf{A}$  for diagonal. Mas como  $\mathbf{A}$  é simétrica, ela pode ser diagonalizada, isto é, existe uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$  tal que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T,$$

Onde:

$\mathbf{Q}$  é ortogonal.

Então temos:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T \mathbf{x} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{x})^T \mathbf{D} (\mathbf{Q}^T \mathbf{x})$$

Chamando

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x} \quad \text{Chegamos à forma} \quad \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}$$

Que não tem o termo misto, e então pode ser esboçada facilmente.

### Exemplo 1.3:

Identifique e esboce a cónica

$$4x^2 + 6xy - 4y^2 = 5$$

### Solução:

Podemos escrever a equação da cónica como

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é simétrica. Vamos calcular seus **autovalores**:

$$p(\lambda) = (4 - \lambda)(-4 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 25$$



Igualando a zero, temos os autovalores

$$\lambda_1 = -5 \text{ e } \lambda_2 = 5.$$

$$\begin{aligned} \lambda = -5 \rightarrow A + 5I &= \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \lambda = 5 \rightarrow A - 5I &= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como queremos uma matriz  $Q$  ortogonal, precisamos de um conjunto ortonormal de autovetores. Como os autovetores são ortogonais, basta normalizá-los.

Com isso obtemos

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

Então

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = QDQ^T$$

Fazemos a mudança de variável

$$\mathbf{x} = Q\dot{\mathbf{x}}$$

Com isso, a equação se torna

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 5 \Rightarrow (Q\dot{\mathbf{x}})^T A (Q\dot{\mathbf{x}}) = 5 \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}^T Q^T A Q \dot{\mathbf{x}} = 5 \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}^T D \dot{\mathbf{x}} = 5$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= 5 \\ -5\dot{x}^2 + 5\dot{y}^2 &= 5 \Rightarrow \dot{y}^2 - \dot{x}^2 = 1 \end{aligned}$$

Essa é a equação de uma hipérbole que se abre sobre  $\dot{\mathbf{y}}$ . Para esboçarmos os eixos  $\dot{\mathbf{x}}$  e  $\dot{\mathbf{y}}$ , precisamos saber que vectores fazem o papel de

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \dot{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

No novo sistema de coordenadas. Mas como

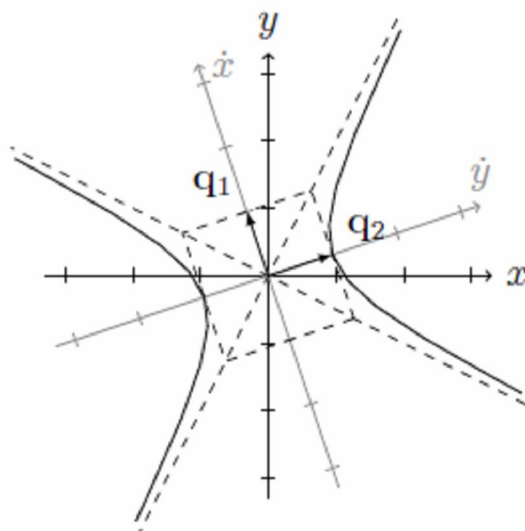
$$\mathbf{x} = Q\dot{\mathbf{x}}$$

$$Q\dot{e}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = q_1$$

$$Q\dot{e}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = q_2$$

Esses vectores são justamente os autovectores de **A**. Agora fazem o esboço, mostrado na figura 1.5.

**Figura 1.5:** Hipérbole do exemplo 10.3.



Quando temos o termo misto e termos em **x** e **y**, a cônica foi rotacionada e transladada. Neste caso a estratégia é eliminar primeiro o termo misto e depois completar os quadrados:

**Exemplo 1.4:**

Identifique e esboce a cônica

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8\sqrt{2}y - 4 = 0$$

**Solução:**

A matriz **A** é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Que é diagonalizada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Fazemos a mudança de variáveis  $\mathbf{x} = Q\dot{\mathbf{x}}$ . Isso elimina o termo misto. Os termos em  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são

$$\begin{bmatrix} 0 & 8\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

Logo se tornam

$$\begin{bmatrix} 0 & 8\sqrt{2} \end{bmatrix} Q\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 8\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -8 & 8 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}$$

Temos então

$$2\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 - 8\dot{x} + 8\dot{y} - 4 = 0$$

$$\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 4\dot{x} + 4\dot{y} - 2 = 0$$

$$(\dot{x}^2 - 4\dot{x}) + (2\dot{y}^2 + 4\dot{y}) = 2$$

$$(\dot{x}^2 - 4\dot{x} + 4) + 2(\dot{y}^2 + 2\dot{y} + 1) = 2 + 4 + 2$$

$$(\dot{x} - 2)^2 + 2(\dot{y} + 1)^2 = 8$$

Agora chamamos

$$\ddot{x} = \dot{x} - 2 \text{ e } \ddot{y} = \dot{y} + 1,$$

E obtemos

$$\ddot{x}^2 + 2\ddot{y}^2 = 8$$

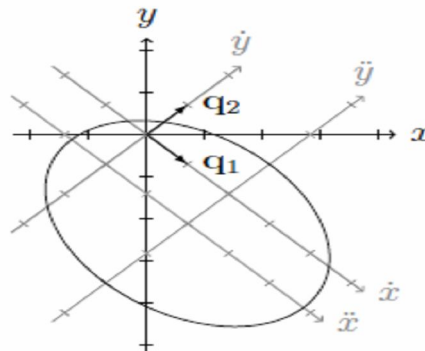
$$\frac{\ddot{x}^2}{8} + \frac{\ddot{y}^2}{4} = 1$$

Que é a equação de uma elipse. Para esboçá-la, primeiro rotacionamos os eixos para apontar para a direcção de:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Novo sistema  $\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{y}}$  para obter o sistema de coordenadas  $\ddot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{y}}$ . A origem de  $\ddot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{y}}$  é em  $\dot{\mathbf{x}} = 2$  e  $\dot{\mathbf{y}} = -1$ . O esboço pode ser visto na figura 1.6.

**Figura 1.6:** Elipse do exemplo 10.4.



## 1.2 – QUÁDRICAS

### Definição 1.2:

As *superfícies quádricas* (ou simplesmente *quádricas*) são os análogos tridimensionais das cónicas. Elas surgem a partir da equação

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{x} + j = 0$$

Onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$  é uma matriz  $3 \times 3$  simétrica e  $\mathbf{B}$  é um vector  $1 \times 3$ , de forma que temos a equação geral

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

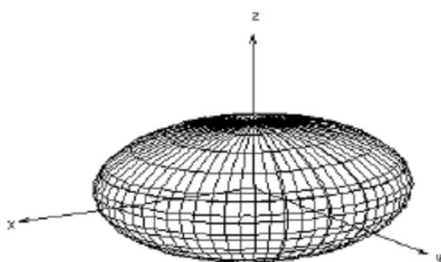
Contudo:

- Também aqui podemos diagonalizar  $\mathbf{A}$  para eliminar os termos mistos e/ou completar os quadrados, de forma que chegamos em uma quádrica na posição padrão em relação a um novo sistema de coordenadas que foi rotacionado e/ou transladado. A figura 1.7 mostra algumas quádricas na posição padrão. Os outros casos são obtidos por permuta das variáveis.
- A tabela 1.1 nos ajuda a identificar as superfícies quádricas mesmo quando há permuta das variáveis. O primeiro passo é separar os termos com variáveis do termo independente, que será 0 ou 1.

Figura 1.7: Quádricas

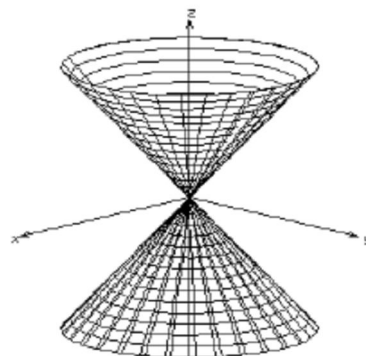
Elipsóide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



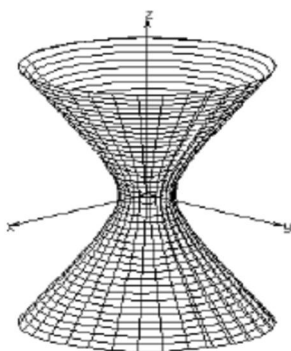
Cone elíptico:

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



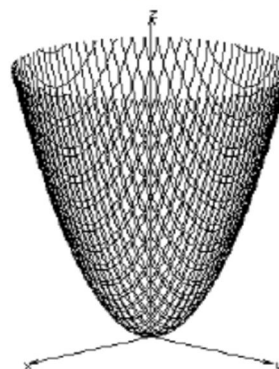
Hiperbolóide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



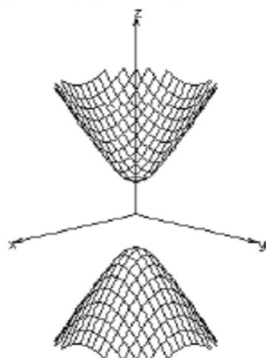
Parabolóide elíptico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



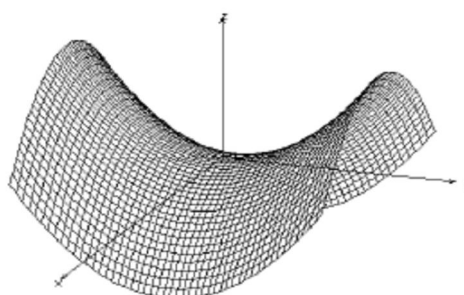
Hiperbolóide de duas folhas:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Parabolóide hiperbólico:

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$



**Tabela 1.1:** Identificando quádricas

Equação	Característica	Quádrica	Observação
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Nenhum sinal de menos	Elipsóide	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Um sinal de menos	Hiperbolóide de uma folha	Se abre sobre o eixo do termo com sinal negativo
$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Dois sinais de menos	Hiperbolóide de duas folhas	Se abre sobre o eixo do termo com sinal positivo
$z^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Nenhum termo linear	Cone elíptico	Se abre sobre o eixo do termo com sinal positivo
$z - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Um termo linear; termos quadráticos com mesmo sinal	Parabolóide elíptico	Se abre sobre o eixo do termo linear
$z - \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 0$	Um termo linear; termos quadráticos com sinais opostos	Parabolóide hiperbólico	Se abre sobre o eixo do termo linear

**Exemplo 1.5:**

Identifique a quádrica de equação

$$5x^2 + 11y^2 + 2z^2 + 16xy + 20xz - 4yz = 36$$

**Solução:**

Podemos escrever a equação matricial como

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 36 \quad \text{Com}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 8 & 11 & -2 \\ 10 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de  $A$  são

$$\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 9 \text{ e } \lambda_3 = -9$$

Com autovetores (normalizados)

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Então

$$Q^T A Q = D$$

Sendo

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$Q\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$$

A equação torna-se

$$(Q\dot{\mathbf{x}})^T A Q\dot{\mathbf{x}} = 36$$

$$\dot{\mathbf{x}}^T Q^T A Q \dot{\mathbf{x}} = 36$$

$$\dot{\mathbf{x}}^T D \dot{\mathbf{x}} = 36$$

$$18\dot{x}^2 + 9\dot{y}^2 - 9\dot{z}^2 = 36$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{4} - \frac{\dot{z}^2}{4} = 1$$

Que é a equação de um hiperbolóide de uma folha que se abre sobre o eixo  $\dot{\mathbf{z}}$ . As direcções dos eixos rotacionados  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$  e  $\dot{\mathbf{z}}$  são dadas por  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$  e  $\mathbf{q}_3$ , respectivamente.



## 1.3 – HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA

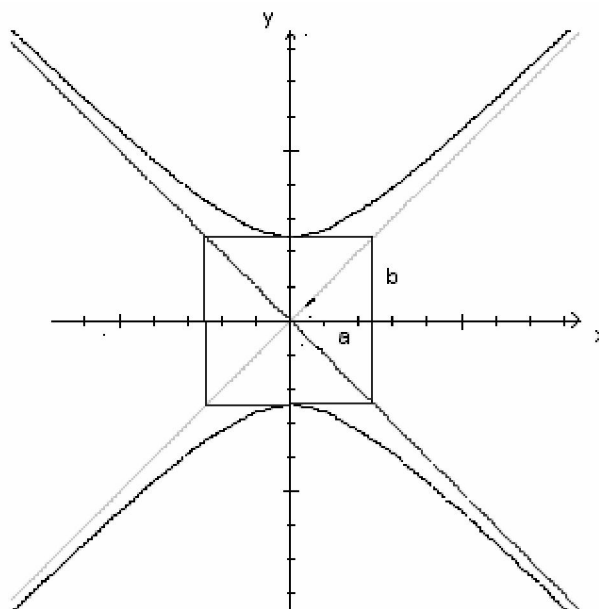
O hiperbolóide representado analiticamente pela equação, denomina-se hiperbolóide de uma folha. São fáceis de verificar as seguintes propriedades:

- A superfície é simétrica em relação aos três planos coordenados, e, portanto aos três eixos coordenados e a origem.
- A intersecção da superfície com um plano  $z = (k, k) \in \mathbb{R}$  é uma elipse de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

A intersecção do hiperbolóide de uma folha com um plano  $x = k$  (ou  $y = k$ ),  $k \neq \pm a$ , (ou  $k \neq \pm b$ ), é uma hipérbole de equação.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$





Fazendo-se  $y = z = 0$ , obtemos  $x = \pm a$ , isto é, os pontos  $(-a, 0, 0)$  e  $(a, 0, 0)$  de intersecção do eixo  $Ox$  com a superfície. Analogamente, fazendo  $x = z = 0$ , tem-se  $y = \pm b$ , ou  $(0, -b, 0)$  e  $(0, b, 0)$  pontos onde o eixo  $Oy$  corta a superfície. O eixo  $Oz$  não intercepta o hiperbolóide.

Se  $a = b$  o hiperbolóide é uma superfície de rotação de eixo  $Oz$ .  
A equação:

$$\alpha(x - x_0)^2 + \beta(y - y_0)^2 - \gamma(z - z_0)^2 = p$$

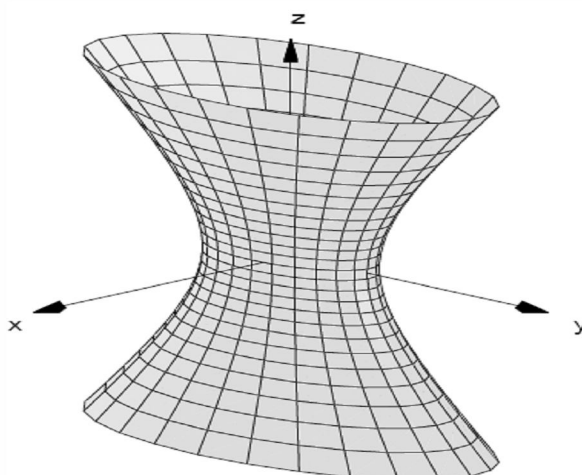
Onde:

$(\alpha, \beta, \gamma \text{ e } p)$  são números reais positivos, representa um hiperbolóide de uma folha de centro no ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  simétrico em relação aos planos  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  e  $z = z_0$ . Toda equação do segundo grau da forma:

$$\alpha_1 x^2 + \beta_1 y^2 + \gamma_1 z^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta = 0$$

Com  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \text{ e } \delta)$  reais que se possa reduzir a forma anterior, representa um hiperbolóide de uma folha.

**Figura 1.8:** hiperbolóide de uma folha



## BIBLIOGRAFIA

- BODULOS, P. & OLIVEIRA, I. C., **Geometria Analítica - um tratamento vetorial**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1986.
- FAINGUELENT, E. K. & BORDINHÃO, N. C., **Álgebra Linear – Geometria Analítica**. São Paulo: Ed. Moderna, 1982.
- KOLMAN, Bernard. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. Ed. LTC. 6ª ed. Rio de Janeiro. 1998.
- LEITHOLD, Louis. **Cálculo com Geometria Analítica**. Editora Harbra Ltda. 3ª ed. 1994.
- RORRES, Anton. **Álgebra Linear com Aplicações**. Ed. Bookman. 8ª Edição. Porto Alegre, 2002.
- STEIMBRUCH, A. & WINTERLE, P., **Geometria Analítica**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1987.

Formato Electrónico