

Examen de Thermodynamique II - Année 2016/17
SMP – S3 – Durée 2h

Exercice 1 - Gaz réel.

On considère n moles d'un gaz réel dont la capacité calorifique molaire à volume constant, c_v , est supposée *constante*. La fonction énergie libre de ce gaz dépend de sa température et de son volume : $F(T, V)$.

1/ Question préliminaire :

1.a/ A partir de la fonction énergie interne U , donner l'expression de la fonction énergie libre de Helmholtz F .

1.b/ Trouver l'expression de la différentielle dF . En déduire l'expression de l'équation de Maxwell associée à cette différentielle.

1.c/ Démontrer l'expression de la relation de **Gibbs Helmholtz** pour l'énergie interne U .

2/ On donne $F(T, V) = nc_v T(1 - \ln T) - \frac{n^2 a}{V} - nRT \ln(V - nb) - TS_0 + U_0$, où a , b , U_0 et S_0 sont des constantes.

2.a/ Déterminer l'expression de l'entropie, S , de ce gaz.

2.b/ En déduire l'équation d'une isentropique de ce gaz. Comparer cette équation à celle d'un gaz parfait.

2.c/ Trouver l'équation d'état de ce gaz. Quelles sont les conditions à vérifier pour que ce gaz soit parfait ?

Exercice 2 : Étude d'une turbine à gaz

Une turbine, opérant d'une manière adiabatique en *régime permanent*, reçoit de l'air à la pression $P_1 = 3.10^5$ Pa et à la température $T_1 = 390$ K. A la sortie de la turbine, la pression de l'air est $P_2 = 10^5$ Pa. Le travail réel développé par cette turbine est $w_{t,r} = 75$ kJ.kg⁻¹. On donne $R = 8,314$ J.mol⁻¹.K⁻¹, la masse molaire de l'air $M = 29$ g.mol⁻¹ et $\gamma = 1,4$.

1/ on admet que la détente dans la turbine est réversible. Trouver, en fonction de T_1 , P_1 et P_2 , les expressions littérales des volumes massiques v_1 et $v_{2,s}$ puis de la température $T_{2,s}$.

2/ Déterminer, en fonction de T_1 , P_1 et P_2 , l'expression du travail massique isentropique $w_{t,s}$ fournie par la turbine.

3/ Application numérique : Calculer v_1 , $v_{2,s}$, $T_{2,s}$ et $w_{t,s}$.

4/ Calculer le rendement isentropique de la turbine, $\eta_{t,s}$.

5/ Trouver l'expression littérale et la valeur numérique de la température réelle, $T_{2,r}$, à la sortie de la turbine.

Exercice 3. Évolution d'un mélange liquide-vapeur

On considère une masse m d'un mélange liquide/vapeur d'eau de volume V_1 et en équilibre à la pression P_1 et sous la température T_1 . On admet que la vapeur même à l'état saturée se comporte comme un gaz parfait et que la chaleur latente massique à la température T_1 est : ℓ_1 . On pose $v_g = v_g(T_1)$ le volume massique de la phase vapeur saturée à la température T_1 .

- 1/ Donner l'expression du volume massique v_1 et du titre en vapeur x_1 du mélange.
- 2/ Ce mélange est chauffé de façon isotherme depuis son état initial jusqu'à l'état de vapeur surchauffée à v_2 .
- 2.a/ Déterminer le travail w_{12} et la chaleur q_{12} massiques échangés pendant cette transformation entre l'état 1 et l'état 2.
- 2.b/ Déterminer la pression finale P_2 .
- 3/ Le fluide est ensuite chauffée de façon isochore jusqu'à l'état 3 à la pression $P_3 = P_1$, puis refroidit de façon isobare jusqu'à l'état 4 de liquide saturé.
- 3.a/ Tracer les différentes transformations subit par ce fluide dans le diagramme P-v en y plaçant les différents états 1, 2, 3 et 4.
- 3.b/ Trouver la température T_3 .
- 3.c/ Quelle est la température finale, T_4 , du fluide.
- 4/ Déterminer le travail massiques échangés w_{23} et w_{34} .
- 5/ Déterminer les chaleurs massiques échangées q_{23} et q_{34} .

Éléments de réponse à l'examen rattrapage de Thermodynamique 2 - S3 – Automne 2016

Exercice 1 - Gaz réel 6 points.

1/ Question préliminaire :

1.a/ Par définition : $F = U - TS$,

1.b/ La différentielle de l'énergie interne s'écrit : $dU = TdS - PdV$

Ce qui donne $dF = -PdV - SdT$.

F est une fonction d'état et donc sa différentielle est totale exacte, d'où $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$: c'est l'une des 4 équations de Maxwell.

1.c/ Démontrer l'expression de la relation de **Gibbs Helmholtz** pour l'énergie interne U .

D'après l'expression de dF , on a : $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$; de plus $\left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V - \frac{F}{T^2}$
 $\left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T}\right)_V = -\frac{S}{T} - \frac{F}{T^2}$. En multipliant par T^2 , on arrive à : $T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T}\right)_V = -TS - F = -U$ ce qui donne $U = -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T}\right)_V$: c'est ce qu'il faut démontrer.

Remarque : accepter toute démonstration logique qui donne le même résultat.

2/ On donne $F(T, V) = nc_v T(1 - \ln T) - \frac{n^2 a}{V} - nRT \ln(V - nb) - TS_0 + U_0$.

2.a/ Expression de l'entropie à partir de la fonction énergie libre : On a $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ ce qui donne : $S = nc_v \ln T + nR \ln(V - nb) + S_0$

2.b/ L'équation d'une isentropie est : $S = \text{cte}$ ce qui donne $nc_v \ln T + nR \ln(V - nb) = \text{cte}$. Dans le cas d'un gaz parfait l'équation de son isentropique est :

$$nc_v \ln T + nR \ln V = \text{cte}.$$

La différence entre les deux expressions est que le gaz parfait semble occupé tout le volume offert au gaz alors que ce gaz réel possède un volume non utilisable ($=nb$).

2.c/ D'après l'expression différentielle de la fonction F on a :

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -[nc_v T(1 - \ln T) - \frac{n^2 a}{V} - nRT \ln(V - nb)]$$

$$\text{d'où finalement } P = \frac{nRT}{(V - nb)} - \frac{n^2 a}{V^2} \text{ qui s'écrit encore } \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

Ce gaz serait parfait si les paramètres a et b sont nuls : $a = 0$ et $b = 0$.

1/ L'air est un gaz parfait : $v_1 = \frac{RT_1}{MP_1}$

La détente est isentropique : $T_{2,s} = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{(1-\gamma)/\gamma}$

[ne pas accepter l'expression $T_{2,s} = \frac{MP_{2,v_{2,s}}}{R}$].

$$T_{2,s} = 284,93\text{K} \quad \text{et} \quad w_{t,s} = -105,42\text{J.kg}^{-1}$$

$$T_{2,r} = 315,26\text{K}.$$

1/ Volume massique $v_1 = \frac{V_1}{m}$ et du titre $x_1 \approx \frac{v_1}{v_g} = \frac{V_1}{mv_g}$.

Chaleur échangée pendant la transformation 1-2 : $q_{12} = \ell_1(1 - x_1) + RT_1 \ln \frac{v_2}{v_g}$

2.b/ Gaz parfait : $P_2 = \frac{RT_1}{Mv_2}$

3.b/ Expression de la température T_3 : $T_3 = \frac{MP_1 v_2}{R}$

3.c/ Température finale, T_4 , du fluide : $T_4 = T_1$

4/ Déterminer le travail massiques échangés w_{23} et w_{34} .

Travail massiques échangés : $w_{23} = 0$

Travail massiques échangés : $w_{34} = -P_1(v_f - v_2)$ donne $w_{34} \approx P_1 v_2$

5/ Chaleurs massiques échangées :

Gaz parfait : $q_{23} = \frac{R}{M(\gamma-1)}(T_3 - T_1)$

Gaz parfait et liquéfaction : $q_{34} = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}(T_1 - T_3) - \ell_1$.