

L'usage de la calculatrice et du mobile est interdit.

N.B :

Le barème est approximatif.

Il sera tenu compte de la présentation de la copie.

Toute réponse doit être justifiée.

Traiter l'exercice 1 dans une double feuille et l'exercice 2 dans un cahier.

Exercice 1 : (10 pt)

1- Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et θ un nombre complexe non réel, et soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si θ est une racine de P de multiplicité m alors $\bar{\theta}$ est une racine de P de multiplicité m , ($\bar{\theta}$ désigne le conjugué de θ).

2- On rappelle que i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$ et j est le nombre complexe de partie imaginaire positive et racine de $X^2 + X + 1$.

Soient a, b deux nombres réels. Montrer que :

$$a + bj = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

3- Soit le polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ défini par :

$$A = X^7 + \alpha X^5 - X^4 + \beta X^3 - 2X^2 - 1 \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Déterminer α et β pour que $\lambda = j$ soit une racine de A .

4- Déterminer la multiplicité de la racine λ dans A (remplacer α et β par leurs valeurs).

5- Montrer que $\delta = i$ est une racine de A puis déterminer sa multiplicité.

6- En déduire la factorisation de A dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

7- Soit le polynôme $B \in \mathbb{R}[X]$ défini par :

$$B = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1.$$

Montrer que $(X^2 + X + 1)^2$ divise B .

8- En déduire la factorisation de B dans $\mathbb{R}[X]$.

9- En déduire, dans $\mathbb{R}[X]$, PGCD(A, B).

Exercice 2 : (10 pt)

Soit l'anneau commutatif unitaire $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ dont les lois de composition internes sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}(x, y) \oplus (x', y') &= (x + x', y + y') \text{ et} \\(x, y) \otimes (x', y') &= (xx', xy' + yx').\end{aligned}$$

1- Déterminer l'élément neutre et l'unité de l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2- L'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est-il intègre ? Justifier.

3- On rappelle que dans un anneau $(A, +, \cdot)$, un élément $a \in A \setminus \{0\}$ est un diviseur de zéro s'il existe $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $a \cdot b = 0$.

Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

4- Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

5- Soit $H = \{(x, 0), x \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que H est un sous-anneau intègre de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

6- Soit l'application définie comme suit :
$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto 2x - y \end{array} \right.$$

i/ Montrer que l'application φ est un morphisme de groupes.

ii/ Déterminer $\ker \varphi$. Le morphisme φ est-il injectif ?

iii/ Déterminer $\text{Im } \varphi$. Le morphisme φ est-il surjectif ?

7- L'application φ est-elle un morphisme d'anneaux ? Justifier.

Bon courage.