KISS ELEMÉR

MATEMATIKAI KINCSEK

Bolyai János

KÉZIRATOS HAGYATÉKÁBÓL

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

TypoTEX Kft.
BUDAPEST

Megjelent a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával

A borítót tervezte
DEBRE FERENC

Számítógépes szerkesztés
CSIZMADIA ERZSÉBET

Számítógépes tipográfia
JUHÁSZ LEHEL

ISBN 963 05 7612 0, ISBN 963 91 32 43 8

Kiadja az Akadémiai Kiadó
1117 Budapest, Prielle Kornélia u. 4.
és
a Typotex Kiadó
1024 Budapest, Retek u. 33–35.

Printed in Hungary

Szüleim

KISS ISTVÁN (1904 – 1996)
és
CSEDŐ BERTA (1904 – 1985)

emlékére

Tartalomjegyzék

Előszó helyett

BOLYAI JÁNOS a magyar és az egyetemes tudomány egyik legnagyobb alakja. A magyar nép szellemi alkotóképessége, a tudomány terén, legmagasabb fokon benne öltött testet. Életét és munkásságát számos mű méltatta, sokan és szerencsére sokat írtak róla. Az előttünk járók szorgos munkájának köszönhetően ma már könyvtárnyi Bolyai-írással rendelkezünk. Rangos monográfiák, sok tudományos dolgozat és népszerűsítő cikk ismerteti életútját, a geometriában elért korszakalkotó felfedezését s a modern matematika kialakításában játszott szerepét.

BOLYAI JÁNOS, a matematikus réges-régen elfoglalta méltó helyét a tudományban. Nemcsak mi, magyarok, de az egész világ ismeri, becsüli a Bolyai-nevet. A csillagászok – HELL MIKSA, EÖTVÖS LORÁND, NEUMANN JÁNOS mellett – róla is elneveztek egy krátert a Holdon. A Mars és Jupiter közötti zónában keringő kisbolygók egyike szintén BOLYAI JÁNOS nevét viseli. Amikor az első magyar űrhajós a világűrben járt, BOLYAI JÁNOS főművének egyik eredeti példányát is magával vitte. Ezzel jelezte, hogy az Appendix a magyar tudomány legragyogóbb 26 oldala.

Valahányszor a nevét említjük, szinte mindig geometriai eredményeit helyezzük előtérbe. Ez teljesen indokolt, hisz az abszolút geometria megalkotásával valóban egyedülálló eredményt ért el. Újabban sok szó esik társadalmi, filozófiai nézeteiről, s talán a Responsio is egyre ismertebbé válik a matematikatörténetben. Létezik azonban BOLYAI JÁNOSnak még egy, kevésbé ismert fontos műve. Ez a halálakor ránk maradt kéziratos hagyatéka. A több ezer oldalnyi Bolyai-ereklye lapjai rejtik azokat a gondolatokat, amelyeket írójuk életének második felében magányosan, sivár környezetben jegyzett föl.

A Bolyai-hagyaték feltárása mintegy 100 évvel ezelőtt kezdődött meg. PAUL STÄCKEL úttörő munkájának köszönhető, hogy a tudományos világ a századforduló idején megismerhette BOLYAI JÁNOS több, kéziratban maradt munkáját. A későbbi Bolyai-kutatás legtöbbször csak STÄCKEL észrevételeire és magyarázataira támaszkodott. *Ő valóban jelentős munkát végzett, de mindent felölelni és* valósan értékelni nem tudott. Könyve a benne fellelhető pontatlanságok és egyes hibák ellenére ma is a legrészletesebb, legalaposabb Bolyai-monográfia.

Lehet-e még újat mondani az Appendix tudós szerzőjéről? Vannak-e ma, 1997-ben fehér foltok a Bolyaira vonatkozó ismereteink térképén? – kérdezhetjük teljes joggal.

Az elmúlt évtizedekben, években megsejtve, hogy BOLYAI JÁNOS kéziratainak lapjai még rejtenek értékes matematikai tételeket, egyre többen sürgették, sürgetik a Bolyai-hagyaték átvizsgálását. Bár számosan forgatták már a kéziratokat, mégis különös, hogy több mint egy évszázad alatt nem akadt egyetlen magyar szakember, aki ezek rejtelmeibe – néhány, főképpen geometriai eredmény vizsgálatán túl – tüzetesen behatoljon. Pedig nagyszerű feladat felkutatni azt, hogy nagy művének megalkotása után mivel foglalkozott a többször csalódott, meg nem értett BOLYAI JÁNOS. E feladat elől viszont kitérni nem szabad, mert kötelességünk hagyományaink feltárása, nyilvántartása és közzététele.

Vajon igaz-e, hogy BOLYAI JÁNOS ízig-vérig geométer és eredeti gondolatai is mindig geometriai tartalmúak? Az eddig megjelent monográfiák szerzői ugyan *megemlítik, hogy Bolyainak „szándékában állt" vagy „remélte" bizonyos nem* geometriai feladatok megoldását, de arra a kérdésre, hogy valójában keresett-e és talált-e a maga által kitűzött kérdésekre választ, már nem adnak feleletet.

Kulturális-tudományos örökségünk feltárásának s ennek keretében a Bolyai-portré minél teljesebbé, igazabbá tételének igénye ösztönzött arra, hogy átolvassam, kibetűzzem a marosvásárhelyi Teleki–Bolyai Könyvtárban őrzött sok ezer oldalnyi Bolyai-kéziratot s megvizsgáljam, mit végzett az abszolút geometria megalkotója a matematika más területein. Nem vállalkozhattam – legalábbis egyelőre – a BOLYAI által kutatott minden probléma feltárására. Eddig csupán azokra a vizsgálatokra összpontosítottam figyelmemet, amelyek során BOLYAI JÁNOS algebrai és számelméleti kérdések megoldását keresi. Az írások valósággal lenyűgöztek, s úgy érzem, hogy makacs, aprólékos munkám jutalmaként a „Bolyai-ládák" több új, eddig ismeretlen titkát, távlatát sikerült felfednem. Vallatóra fogva ezeket az írásokat kirajzolódott az eddig ismertnél egy árnyaltabb, teljesebb, színesebb Bolyai-kép.

Könyvemben – felhasználva és kiegészítve a már megjelent részlettanulmányaimat – BOLYAI JÁNOSnak a kéziratos hagyatékban rejtőző olyan felfedezéseiről szeretnék tudósítani, amelyekről az eddigi igen tekintélyes Bolyai-irodalom

semmit sem tud. Célom a Bolyai-kutatásban még mindig létező fehér foltok közül néhányat eltüntetni és másokat is felfedező útra buzdítani. Igyekeztem a korábbi szakirodalom tévedéseit kiigazítani s felhasználva a kiadatlan dokumentumokat, minden érvelésemet BOLYAI JÁNOS szavaival alátámasztani.

Munkám során, ahol csak tehettem, mindvégig elkerültem a másod- vagy harmadlagos forrásokat, és csak az elsődlegesekből, azaz a kéziratokból szereztem az ismereteket. Sok esetben tapasztaltam, hogy igen hasznos az eredeti források alapján ellenőrizni más szerzők állításait.

Igaz, hogy a hagyatékban nem találunk a Tér tudományához hasonlítható művet, de ha türelmesek vagyunk és elég mélyre ásunk, akkor felfedezzük, hogy a Bolyai-kéziratok még sok meglepetést tartogatnak számunkra. Fáradozásainkért bőven kárpótolnak azok a kincsek és gondolat-gyöngyök, amelyeket felszínre hozhatunk. Remélem, hogy e sorok olvasója is annak tekinti majd BOLYAI JÁNOSnak azokat az észrevételeit, amelyek eddig a Teleki Téka polcain heverve nem váltak ismertté a matematikai irodalomban, de amelyeket később, évtizedekkel zseniális matematikusunk halála után, mások újra felfedeztek és különböző folyóiratokban közöltek.

BOLYAI JÁNOS kéziratos hagyatékának lapjain így idézi édesapja véleményét az írásról: „... *Atyámként tán már több az író, mint az olvasó, s szinte már az érdemel emléket ki ugyan képes lévén olvasni és írni is, fontos és nyomós ok nélkül író nem lesz, ...*". Bár átéreztem és megfontoltam BOLYAI FARKAS bölcs szavait, sok töprengés és habozás után elhatároztam, hogy mégis megpróbálok „*író*" lenni. Úgy érzem, hogy most „*fontos és nyomós*" okom van erre.

Az utóbbi években BOLYAI JÁNOS elszórtan hevert jegyzeteit, papírszeletkéit összesöpörve számos olyan, eddig rejtőzködő gondolatát sikerült napvilágra hoznom, amelyek – ha megkésve is – megérdemlik, hogy tanulmányokká dagadjanak. BOLYAI mostoha sorsa miatt saját írásaiból mindössze csak 26 oldalt olvashatott nyomtatásban. Ezért a következőkben gyakran hagyom beszélni a szövegeket, hogy mindannak töredékét, amit már egyszer leírt, de nem tudott közreadni, most közösen juttassuk el az olvasóhoz.

Köszönettel tartozom mindazoknak, akik bátorítva kutatómunkámat rokonszenvvel és segítőkészséggel álltak mellém.

Az autográf Bolyai-iratokat a Teleki Tékában tanulmányozhattam. A könyvtár minden dolgozójának hálás vagyok állandó segítségéért. Munkám során végig éreztem, hogy tevékenységemet őszinte együttérzéssel követték, s örvendtek az elért eredményeknek.

Sokat jelentett számomra azoknak a folyóiratszerkesztőknek a bátorítása, akik kézirataimat először fogadták el közlésre. Különösen STAAR GYULA (a Természet Világa főszerkesztője) és MAURER I. GYULA (a Mathematica Pannonica főszerkesztője) karolták fel első kísérleteimet.

Nagyot lendített munkámon a Magyar Tudományosság Külföldön akadémiai program keretében meghirdetett *Domus Hungarica Scientiarum et Artium* ösztöndíjrendszerének támogatása, amelynek segítségével hosszabb időt tölthettem Budapesten s ott is folytathattam kutatásaimat.

Különös hálával tartozom Dr. SZENDREI JÁNOSnak és Dr. VEKERDI LÁSZLÓnak, a kézirat lektorainak. Észrevételeikkel jelentősen hozzájárultak ahhoz, hogy a könyv értékesebbé váljék.

Végül néhány szót az Irodalomjegyzékben található munkákra való hivatkozásokról. [1] az 1-es munkára való hivatkozást jelenti; [1, 159 old.] az 1-es munkában a 159-es oldalra, [1, 4] pedig az 1 és 4 munkákra való hivatkozást jelenti. Ha egy több kötetes munkára utalok, akkor például a [10, 3:76]-tal azt fogom jelölni, hogy a 10-es munka 3. kötetének 76. oldalára hivatkozom.

Mivel BOLYAI JÁNOS [18] kéziratos hagyatékára nagyon sokszor hivatkozom, azért ezt elhagyom, a megfelelő oldalszámot egyszerűen csak zárójelbe teszem. A ($982/8^v$) például a [18]-ban található 982/8-as jelzetű lap hátsó, páros oldalát jelenti. Megjegyzem még, hogy a Marosvásárhelyen található hagyatékban minden oldalt egy törtszám jelöl. A 982/8 jelzet a 900-as dosszié 82-es számozású lapjai közül a 8. oldalt jelenti. A (2.3.§) hivatkozás pedig azt mutatja, hogy a könyv 2. fejezetének 3. paragrafusára utalok.

Saját kiegészítéseimet, szó- és szövegmagyarázataimat, latin kifejezések fordításait stb. kapcsos zárójelbe – { } – fogom tenni. BOLYAI JÁNOS szavai, vagyis a kéziratokból idézett részletek a könyvben végig dőlt betűkkel jelennek meg.

Marosvásárhely, 1997. december 15-én, BOLYAI JÁNOS születésének 195. évfordulóján.

Kiss Elemér

1

Bolyai János életútja és a Tér tudománya

1.1. Bevezető szavak

Munkánk első részében felidézzük BOLYAI JÁNOS életútjának néhány, sikerekben szegény, csalódásokban gazdag állomását. Szót ejtünk geometriai felfedezéséről és egyéb kutatásairól. Életének ezek a mozzanatai, a mértanban és a komplex számok elméletében elért eredményei széles körben ismertek. Mégsem kerülhetjük el a legszükségesebb életrajzi adatok felemlítését s munkásságának vázlatos bemutatását, mert ezekre a későbbiek során is többször fogunk utalni. Ha az itt következő sorokban nem is tudunk sok újat mondani olvasóinknak, hisz BOLYAIról már számos kiváló könyv és írás jelent meg (PAUL STÄCKEL, DÁVID LAJOS, BENKŐ SAMU, SZÉNÁSSY BARNA, WESZELY TIBOR, TORÓ TIBOR, TÓTH IMRE, SARLÓSKA ERNŐ, VEKERDI LÁSZLÓ és mások tollából), mégis törekedni fogunk arra, hogy az ismert adatokat több helyen kiegészítsük a kéziratokban fellelhető, de eddig még nem közölt Bolyai-vallomásokkal. Felhasználva az utóbbi időben megjelent több szakdolgozatot [61, 94, 114, 115, 128], geometriai rendszerének ismertetéséhez is fűzünk néhány újabb adatot.

Számosan vélekednek úgy, hogy a prioritási viták általában terméketlenek. Sajnos egyes matematikatörténészek pontatlan munkálkodása nyomán BOLYAI JÁNOS felfedezésével kapcsolatban olyan téves eszmék is behatoltak a köztudatba, amelyeket nem hagyhatunk szó nélkül. Úgy érezzük, hogy a kihívásokra szükséges feleletet adnunk.

1.2. Bolyai János életútjának állomásai

Néhány év múlva fogunk megemlékezni BOLYAI JÁNOS születésének 200. évfordulójáról, aki BOLYAI FARKAS (1775–1856) fiaként 1802. december 15-én született Kolozsváron. Hála apja közlékenységének, jól ismerjük János gyermekkorát. Már ebben az időben feltűnt sokirányú szellemi tehetsége s a matematika iránti rendkívüli fogékonysága. A fiára büszke apa régi barátjához, C. F. GAUSShoz (1777–1855) írott levelében [101, 86–87 old.], részletesen beszámol János különleges képességeiről. Elmondja, hogy a kisfiú játékból az égbolt sok csillagának nevét megtanulta, ismer több geometriai alakzatot. Az írás-olvasást hatéves korában szinte magától sajátította el, rá egy évre kezdte tanulni a német nyelvet és a hegedűjátékot.

A kéziratokat olvasva BOLYAI JÁNOSnak olyan följegyzéseire is találhatunk, amelyekben – ismert önéletrajzi írása mellett – saját maga is beszél érdekes gyerekkori gondolatairól. *„Már kisgyermek koromban* – írja a kéziratos hagyaték 1214/2-es számozású lapján – *feltettem magamnak a kérdést, hogy végtelen sok prímszám létezik-e?"*.

Arról, hogy BOLYAI JÁNOSban igen korán jelentkezik a matematika iránti szenvedélyes érdeklődés, eddig csak BOLYAI FARKAS leveleiből értesülhettünk. A fent említett följegyzésben viszont maga jelenti ki, hogy már gyermekkorában foglalkoztatta a számelmélet egyik fontos kérdése. De léteznek még más, ehhez hasonló vallomásai is. A hagyaték 1389/1 oldalán így ír: *„még első fiatal, sőt gyermekkoromban magamtól is találtam, átláttam, rámentem"*, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{k}{m}\right)^m = e^k.$$

Beismeri, hogy eleinte az imaginárius mennyiségek fogalma nem volt elég világos számára, de később megpillantva az $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ képletet, érdeklődése mindjárt ezek felé a számok felé fordult:

„Az integráláskor néha logaritmust is ... de akkor még az al-uti nyikról {imaginárius mennyiségek} *nekem sem lévén illő világos képzetem, inkább irtózva s hasztalan üresnek véve elfordultam s annyibahagytam, nem is mertem akkor tovább nyomozni (mint a Δ tant is legelőbb bár is észre-véve) míg végre megláttam a $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$... mi által végre fölhíva érzem magamat mindenekelőtt a fő – és al-uti nyikról tiszta fogalmat szerezni..."* ($1389/1^v$).

Jánost 9 éves korában apja kezdte tanítani. Matematikára alig kellett oktatnia, mert egy pillanat alatt felfogta és átlátta az újonnan hallott tételt és azonnal

Emléktábla Bolyai János temesvári lakóházán (Kiss Péter felvétele)

tudta a bizonyítást is. 13 éves korában már tud latinul. Farkas 1816. április 10-én [101, 99 old.] írta GAUSSnak: ... „felnőtt tanítványaimmal együtt nyilvánosan igen dicséretesen vizsgázott deákul...". 1817-ben osztálya legjobbjaként a marosvásárhelyi Református Kollégiumban leteszi a mai gimnáziumi érettséginek megfelelő vizsgát.

BOLYAI FARKAS azt szerette volna, ha rendkívül tehetséges fia Göttingenben GAUSSnál folytatná tanulmányait. Ezt meg is írta GAUSSnak [101, 99–100 old.], de ifjúkori barátja nem válaszolt a levelére. Ezért hosszas töprengés után úgy határozott, hogy fiát a bécsi hadmérnöki akadémiára küldi továbbtanulni. János Bécsben 1818 augusztusában sikerrel letette német nyelven a felvételi vizsgát, és ezzel megkezdődött katonai pályafutása.

A nagy tradícióval rendelkező bécsi akadémia színvonalas iskolának számított. Bécsi tanáraitól azonban BOLYAI JÁNOS kutatásaihoz legföljebb bátorítást kaphatott, de irányítást, segítséget nem – állapítja meg SZÉNÁSSY BARNA (1913–1995). Ez talán igaz, de ne feledkezzünk meg arról se, hogy a Habsburg-birodalomban a XIX. század elején Károly főherceg katonai reformjai szellemében korszerűsítették az egész tisztképzést és a katonai tanintézetekben, elsősorban pedig a bécsi cs. kir. mérnökakadémián az oktatás középpontjába a matematika kerül [3, 9 old.]. SARLÓSKA ERNŐ [95] tanulmányából azt is megtudhatjuk, hogy BOLYAI JÁNOS Bécsben egy tág horizontú világba jutott, amelyből később se lépett ki soha [123]. SARLÓSKA – írja VEKERDI LÁSZLÓ – az Akadémiai Könyvtár Kézirattárában őrzött gazdag kéziratos anyag gondos tanulmányozása során jutott arra a meggyőződésre, hogy BOLYAI JÁNOS szokásos megítélése téves, kivált, ami a műve megalkotása szempontjából oly fontos ifjúi éveit s katonai szolgálatát illeti. Egy nagy, racionális, jóindulatú és emberséges rendszer

működését kanyarítja a gondolataival viaskodó János köré, amely védte inkább, mintsem gátolta a kereteibe szükségképpen nehezen beilleszkedő lángelmét [9, 41 old.].

János mindig jó tanuló volt, s ami a legfontosabb, hogy hadmérnöki akadémiai évei alatt is rendszeresen foglalkozott matematikával. Jegyzeteiben már ekkor felvillannak eredeti ötleteinek szikrái.

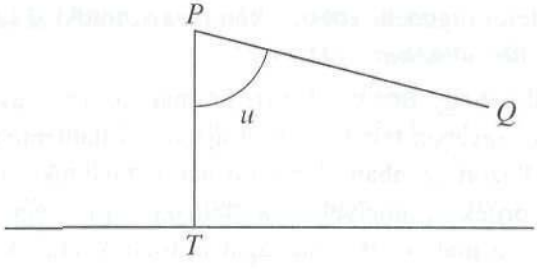
Mechanikai feladatok megoldását tartalmazó akadémiai jegyzetfüzetében ($1563/1^v$, 2^v) található ábrák – melyek felett a Parallelarum Theoria cím olvasható – azt igazolják, hogy már bécsi diákoskodása idején, 1820 körül foglalkoztatták a párhuzamosok posztulátumával kapcsolatos kérdések annak ellenére, hogy ebben az időben apja „a maga sárkányától óvja 17 éves fiát" (Németh László).

Bolyai János ugyanebben az évben, a hadmérnöki akadémia tanulójaként, egy nevezetes ókori problémával, a szögharmadolással is foglalkozott (tetszőleges szög három egyenlő részre való osztása körző és beosztás nélküli egyenes vonalzó használatával). Hagyatékában fennmaradt egy papírlap ($1114/2^v$), amelyre igen szűkszavúan, megokolás nélkül vázolta fel szerkesztését. A szerkesztést körző és vonalzó segítségével végezte el, de emellett még igénybe veszi az egyenlő oldalú hiperbola egyik ágát is. János följegyzéséről Paul Stäckel (1862–1919) is beszámolt [106, 1:235–236]. Bolyai eljárásának helyességét Szőkefalvi-Nagy Gyula (1887–1953) bizonyította be a [118] dolgozatban. A szögharmadolásnak egyenlő oldalú hiperbolával való elvégzésével már a régi görög matematikusok is foglalkoztak, s utánuk mások is, de a feladatnak Bolyai János szerkesztésén alapuló keresztülvitele ezek közül a legegyszerűbb – jegyzi meg dolgozata végén Szőkefalvi-Nagy Gyula.

Tanulmányait János 1823-ban fejezte be, s rövidesen Temesváron találjuk. A paralelákról Bécsben elkezdett több mint hároméves töprengései itt értek be. Alig érkezett meg Temesvárra, már megvilágosodott benne világraszóló felfedezésének döntő gondolata. Innen írja édesapjának Marosvásárhelyre november 3-án, nem egészen 21 éves korában, az immár matematikatörténeti jelentőségű levelét ($1565/1$, 1^v), amelyben értesíti az első nemeuklidészi geometria alapképletének – az ún. párhuzamossági szög és párhuzamossági távolság között fennálló összefüggés – felfedezéséről.

Toró Tibor kezdeményezésére 1993. november 3. óta ötnyelvű emléktábla jelöli Temesváron annak a háznak a homlokzatát, ahol Bolyai dolgozott és felfedezte azt az alapvető összefüggést, amit aztán az Appendix 29. paragrafusában írt le:

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = e^{\frac{x}{k}}$$



ahol $PT=x$, $m(TPQ\measuredangle)=u$ az x távolsághoz tartozó párhuzamossági szög, e az Euler-féle szám (e=2, 718 ...), k pedig egy, a teret jellemző pozitív valós szám.

BOLYAI JÁNOS az abszolút geometria alapjait Temesváron eltöltött évei alatt (1823–1826) fogalmazta meg és foglalta össze egységes rendszerbe. Tehát ilyen értelemben a temesvári időszak életében és geometriai rendszerének megalapozásában döntő fontosságúnak bizonyult. 1825 elején hazalátogatva Marosvásárhelyre megmutatta apjának a már kidolgozott elméletét. Fájdalommal állapította meg, hogy apja – akkor még – nem volt képes annak lényegét és jelentőségét felfogni.

1826 áprilisában BOLYAIt Aradra helyezték, itt érte el a főhadnagyi rendfokozatot. Tudománytörténeti szempontból nagy jelentőségű esemény, hogy ebben az évben átadott JOHANN WOLTER von ECKWEHR (1791–1857) századosnak, közvetlen parancsnokának és volt bécsi matematikatanárának egy kézírásos értekezést, amelyben addigi nemeuklidészi geometriai vizsgálatai eredményeit foglalta össze. Sajnos, ennek a kéziratnak nyoma veszett, de BOLYAI JÁNOSnak egy későbbi följegyzéséből kétségkívül kiolvashatjuk az átadás tényét és időpontját. „WOLTER*nek ki mint derék nyitanász* – írja BOLYAI – *s különös eleven képzeletése által jelesen az űrtani rajztan vagy dessin geometralban éppen különösön jártas egyén, a császári királyi mérnök vagy ingéneur akadémiában tanultamkor is két ízben is nagyon kedves s tisztelt tanítóm volt és kinek jelleme tisztasága s irántami jóindulatjában távul legyen, hogy kétkedni akarnék már, vagy még az 1826-évben átadtam: honnan is azonban ki tudja mi történet által, a nagy tiszteletet kiérdemlett* WOLTER*nek akaratja ellen is szivároghatott vagy vetődhetett Isten tudja hova el.*" ([9], első borítójának belső oldalán).

BOLYAI JÁNOS aradi szolgálata alatt is matematikus volt. Aradra címzett két kiterített levélborítékon – amelyek közül egyik 1827. márc. 11-i keltezésű – található följegyzések tanúsítják, hogy a fiatal katonatiszt már abban az időben érdeklődik a magasabb fokú algebrai egyenletek megoldása iránt. Mindkét borítékon ugyanolyan jelölésekkel a harmadfokú egyenlet megoldását tárgyalja a diszkri-

mináns előjelétől függően. Több, a komplex számokkal kapcsolatos összefüggés is található a két borítékon (1213/1-2^{v}).

Kétségtelen, hogy BOLYAI JÁNOS számára az 1820-as évek az Appendix kidolgozásának jegyében teltek el. Életrajzának valamennyi írója ezt hangoztatja. Följegyzései között azonban olyan írásokat is találunk – mint például az Aradra címzett két boríték –, amelyek arra utalnak, hogy a geometria mellett már ebben az időben a matematika más ágai is foglalkoztatták. Az algebra mellett a komplex számok elmélete is lekötötte a figyelmét. „*Az imaginárius mennyiségek tanát* – írja – *kis híján negyed évszázaddal ezelőtt, amikor az én igen fontos Tér Tudományommal foglalkoztam, már kigondoltam*" (587/1). Ide tartozik az (1546/1) oldal is, amelyre az (5.3. §)-ban utalunk majd. Hogy BOLYAI JÁNOS milyen alaposan tanulmányozta az 1820-as években GAUSS Disquisitiones arithmeticae című művét, kitűnik apjának GAUSShoz írt, 1831. június 20-án kelt leveléből: „Fiamnak szándéka volt, hogy a Te polygon-elméletedet németül, a kisebb kaliberű elméknek valamivel könnyebben hozzáférhető módon adja ki." [101, 103–104 old.].

1831 elején Lembergbe vezényelték, s odautaztában felkereste Marosvásárhelyen édesapját. Ez a találkozó döntő hatású volt az Appendix megjelenésére, mert amint később leírja: „... *ha történetesen akkor* ... *az atyám nem ösztönzött s mondhatni erőltetett volna a hirtelen leírásra – hihetőleg azon Appendix tartalma sem látott volna még napfényt.*" BOLYAI FARKASnak tehát fontos szerepe volt az Appendix létrejöttében és megjelentetésében [111, 111 old.]. A közvéleménybe – még PAUL STÄCKEL hatására – elég mélyen befészkelte magát az a hiedelem, hogy BOLYAI FARKAS nem értette meg az Appendixet. Pedig az apa már az 1830-as évek legelején fokozatosan megbarátkozott a fia által alkotott új geometriával. 1831 első felében a még meg sem jelent munkáról ezt írta egyik volt tanítványának: „Originális nagy munka; magyar tollúból olyan matematikus munka nem jött, ...". Különben BOLYAI FARKASnak egyetlen olyan, 1831 után nyomtatásban megjelent írásáról sem tudunk, melyben ne dicsérte volna fia munkáját. Egyetérthetünk tehát SZÉNÁSSY BARNÁval, aki szerint: „Biztosan állítható, hogy ha az apa nem vezette volna be fiát a paralelák kérdéskörének ismeretébe, ..., valamint, ha nem sürgette volna eredményei leírására és közzétételére, akkor a matematikai irodalom egy korszakos jelentőségű művel, a magyarság pedig talán legjelentősebb tudósával lenne ma szegényebb." [116, 14 old.].

1832 áprilisában BOLYAI JÁNOSt egy újabb rendelkezés Olmützbe szólította. Itt kapta meg a másodosztályú kapitányi rendfokozatot. 1832-ben János főherceghez (a bécsi hadmérnöki akadémia főigazgatója) folyamodott háromévi szolgálatmentességet kérve, hogy a még ki nem dolgozott matematikai vizsgálatait

befejezhesse. Elutasították. 1833. június 16-i hatállyal saját kérésére nyugállományba helyezték. Az előző években többször betegeskedett. Már aradi tartózkodása alatt kezdtek jelentkezni különféle betegségeinek első tünetei. Gyakran volt maláriás, feltehető, hogy ízületi gyulladást is szerzett. „*1831-ben Lembergbe menve* – írja egy későbbi levélben ([12], K23/86-87) – *Besztercén a cholerát legelőbb kiállottam*", amikor Olmützbe utazott szekere felborult, a fején megsérült, agyrázkódása is volt.

Közben, 1832-ben megjelenik BOLYAI JÁNOS korszakalkotó műve, a Tér abszolút igaz tudománya, vagy ismertebb nevén az Appendix [14]. Szokássá vált, hogy BOLYAI értekezését inkább Appendix címen említjük. A legtöbbször ő maga is így nevezi meg a megjelenéskor Scientia Spatii, német kéziratban pedig a Raumlehre (380/1) címet viselő munkáját. Ez a nagy jelentőségű mű BOLYAI FARKAS Tentamen [10] című könyve első kötetének függelékeként került ki a marosvásárhelyi Református Kollégium nyomdájából, de különlenyomatai már egy évvel hamarább, 1831 áprilisában elkészültek [13]. BOLYAI FARKAS az Appendix különlenyomatát 1831. június 20-án küldi el GAUSSnak. Mivel János munkája útközben elkallódott, azt 1832. január 16-án újból megküldi barátjának egy újabb levél kíséretében, amelyben ezt írja: „Fiam többre becsüli a Te ítéletedet, mint egész Európáét." [101, 107 old.].

GAUSS 1832. március 6-án válaszol [101, 108–113 old.]. Levelének egyik mondata: „ha fiad munkáját megdicsérem, ez azt jelentené, hogy magamat dicsérném" – közismert. A kétes értékű dicséret BOLYAI JÁNOSt mélyen lesújtotta, elkeserítette. Becsapott, megcsalt embernek érezte magát, annak ellenére, hogy a levél hűvös hangja dacára is mély elismerést fejez ki. GAUSS emberi hozzáállását már sokan elemezték, próbálták megmagyarázni. Nehéz megérteni viselkedését. „Fukar kezekkel" mért, „de hiszen nagy úr" volt.

Különös, hogy GAUSS, aki a BOLYAI FARKASnak írt levélben igen fukarul bánt a dicsérő szavakkal, magánbeszélgetésben és CH. L. GERLING (1788–1864) marburgi matematikusnak írt levelében viszont másképpen nyilatkozott. ZEYK JÓZSEF Göttingenben tanuló ifjú, szüleinek küldött levelében elbeszéli, hogy mikor GAUSSnak átadta János munkáját s GAUSS elolvasta azt, így szólt: „Igen kitűnő fej, valóban igen kitűnő...". Elgondolkoztató a GERLINGhez 1832. február 14-én (tehát csak három héttel a BOLYAI FARKASnak küldött levél előtt) írt levelének néhány mondata: „... a napokban Magyarországról egy, a nemeuklidészi geometriát tárgyaló kis művet kaptam... Szerzője, aki nagyon fiatal osztrák katonatiszt, fia egyik ifjúkori barátomnak, ... Ezt a fiatal geométert, BOLYAIt, elsőrangú lángésznek tartom." [22, 387 old.].

Miért GERLINGnek írt GAUSS „elsőrangú lángész"-ről és miért nem BOLYAI FARKASnak, vagy miért nem tette közhírré BOLYAI JÁNOS felfedezését a Göttin-

geni Tudományos Értesítőben? Magatartása még mindig érthetetlen számunkra. A nagy „fejedelem" sokszor másokkal sem volt egyenes. Ismert, hogy hasonlóan bánt el NIELS ABELlel (1802–1829), CARL JACOBIval (1804–1851) is [127, 29–30 old.].

BOLYAI JÁNOS nyugalomba vonulása után 1833 júniusában visszatért Marosvásárhelyre s egy éven át apjánál lakott, majd 1834-ben elköltözött egy távoli faluba, Domáldra. Itt élt elszigetelten 1846-ig. Életrajzírói egyetértenek abban, hogy Domáldon nem végzett komoly matematikai kutatásokat. Ezt a véleményt is helyesbítenünk kell. A domáldi tartózkodás nem volt sem „terméketlen" [106, 1:99], sem „meddő" [127, 45 old.] a matematikai kutatások szempontjából. Tudjuk, hogy erre az időre esik például másik nevezetes műve, a Responsio megírása, amellyel a lipcsei Jablonowski Társaság pályázati felhívására válaszolt 1837-ben. Sajnos a komplex számokról készült, mély és eredeti gondolatokat is tartalmazó dolgozatát a pályabírák nem értették meg, s így egy újabb nagy csalódás érte, ismét elmaradt a megérdemelt elismerés.

Emellett még más kérdések is foglalkoztatták Domáldon, csakhogy erről a Bolyai-irodalom még nem tud. Íme néhány bizonyíték. A kéziratos hagyaték egyik lapján (143/3) a következőket írja: „... *már 1837-ben fordítottam különös figyelmemet e tárgyra...*" Ez a tárgy pedig a magasabb fokú algebrai egyenletek megoldhatóságának kérdése, amellyel az aradi tapogatózások után, tehát Domáldon kezdett komolyan foglalkozni. Erre utalnak azok az írásai is, amelyeket különböző levélpapírok őriztek meg számunkra. Így például az ötödfokú algebrai egyenlet gyökeinek permutációjával összefüggő följegyzéseket olvashatunk egy 1842. március 1-én Domáldra címzett levél üresen hagyott részein ($438/2^v$). Az ötödfokú egyenlet megoldhatóságával kapcsolatos gondolatait rögzíti egy olyan levélborítékon, amelyen apja következő címzése áll:

Pensionatus M. Kapitány
Bolyai Bolyai János
Úrnak atyai szeretettel

Domáldon

Gondolatsorát ezekkel a szavakkal zárja: *elég gyönyörű dem.* ($198/1^v$). Algebrai természetű jegyzeteket pillanthatunk meg egy hivatalos okmányon is, amelyet Kerelőszentpálról küldtek neki 1842. szeptember 27-én. Az irat különben a hivatal válaszát tartalmazza BOLYAI JÁNOS egy folyamodványára. Lényege, hogy „kérés teljesítése lehetetlen" ($1013/1^v$). A harmadfokú algebrai egyenlet komplex gyökeivel kapcsolatos följegyzéseket találunk egy 1842. május 11-én

keltezett levélen (1130/1^v). Domáldról küldi apjának valamikor 1844. szeptember 2-a után azt a szép levelet amelyben munkájáról s terveiről számol be: „*Én elhatározám magamban* – írja – ..., *hogy elöljáróúl ... bocsássak előre haladék nélkül mihelyt Kolosvárról visszakerülök magyarul is (gondolom a magyar tudós társasághoz küldendőül), németül is (mint* GAUSS*nak küldendőt) egy kis terjedelmű munkát ... Az integrális tanban is tömérdek új, könnyű, tiszta tanom van ...*" (445/1, 1^v, 2^v). A levélben nagy terjedelemben kap helyet az algebrai egyenletek megoldásának a kérdése. Más írásai, például az 1842. április 24-én Domáldra címzett levélborítékon található jegyzetek tanúsítják, hogy „remetesége" idején számelméleti problémákkal is bajlódott. Egyik íráson, amely „*1841. február 2-án kezdődött s a róla való gondolás, reákészülés s elszánás az előtti éjjel ...*" (759/1), olyan próbálkozásokat találunk, amelyek az $F_k = 2^{2^k} + 1$ Fermat-féle számok prím voltának vizsgálatához kötődnek (759/12^v). Tehát a domáldi tartózkodás idejére esnek ezek a kutatások is.

Fontos dátum BOLYAI JÁNOS életében 1848. október 17. Ekkor jutott NYIKOLAJ IVANOVICS LOBACSEVSZKIJ (1793–1856) 1840-ben Berlinben megjelent Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien című könyvéhez. Érthetően meg volt döbbenve az Appendix tartalmával való megegyezéstől. Nem nehéz elképzelni, milyen izgalommal olvasta és jegyezte le a könyv tartalmával kapcsolatos véleményét. LOBACSEVSZKIJ munkájáról a legnagyobb elismeréssel nyilatkozott. Észrevételeiből is jellemének tisztaságát és mély igazságszeretetét olvashatjuk ki. Ezzel kapcsolatban a következő mondatot szeretnénk idézni: „*Még oly szép, jó s nemes irányú vagy törekvésü nyitani* {matematikai} *lángelme van Orosz-Honban, mint* LOBACSEWSZKIJ*é: addig már csak azért is elég ok vagy alap van az Orosz-Hon fölsőbb kimüvelődése iránt is a legjobb reményt venni*" (93/1).

BOLYAI JÁNOS az Észrevételeket nem a nyilvánosság számára, hanem saját magának készítette. A századforduló idején azonban PAUL STÄCKEL és KÜRSCHÁK JÓZSEF (1864–1933) ennek lényegesebb részeit a [105] dolgozatban közölték. A jegyzetekben természetesen vannak BOLYAInak LOBACSEVSZKIJ művével kapcsolatosan megjegyzései és kifogásai is. Ezekkel nagyrészt STÄCKEL is egyetért. Van azonban egy erősebb hangú bírálata is, amely a Geometrische Untersuchungen 27. paragrafusára vonatkozik. Szerinte LOBACSEVSZKIJ „*szarvashibát*" követ el. Ezt STÄCKEL és később V. F. KAGAN (1868–1953) sem fogadta el. WESZELY TIBORé az érdem, aki nagy hozzáértéssel megvizsgálva a 27. cikkelyt megállapítja, hogy „BOLYAI JÁNOS nem bírált alaptalanul" [127, 302–319 old.] és [128, 32 old.].

A szabadságharc utáni elnyomatás éveiben János valósággal bezárkózott. Sokat betegeskedve egyedül élt. Ennek ellenére állandóan dolgozott. 1850 körül

kezdett foglalkozni a Raumlehre-vel, egy befejezetlen, de számos eredeti elgondolást és meglátást tartalmazó munkával. Már DÁVID LAJOS (1881–1962) [34, 21 old.] észrevette, hogy BOLYAI ebben az írásban a fél évszázaddal később megszülető, s nagyon nagy jövőjű matematikai diszciplína, a topológia alapjait rakta le. A feltárt kéziratok arról árulkodnak, hogy tudományának más ágai sem hagyták nyugodni. Könyvünkben ezek közül most csak a számelméleti és algebrai természetű eredményekkel foglalkozunk. Későbbi feladatunknak tekintjük munkánk kiterjesztését BOLYAI JÁNOSnak azokra a vizsgálódásaira is, amelyek során a racionális tört függvények elemi tört függvényekre való felbontásával, a sorok konvergenciájával, integrálszámítással, az eratoszthenészi szita módszerének megjavításával stb. foglalkozott még. A kéziratokban ui. sok, a felsorolt problémákhoz kapcsolódó jegyzetet találunk.

BOLYAI JÁNOS életrajzírói közül többen (így P. STÄCKEL is) azt a véleményt hangoztatják, amely szerint János alkotóképessége már korán kimerült, lanyhult érdeklődése a matematikai kérdések iránt. A jelentős matematikusokról 1990-ben kiadott lexikon [85, 64 old.] rövid szócikkében szinte csak azt tartja fontosnak megírni, hogy BÓLYAI JÁNOSt (így, hosszú o-val!) élete végén anyjától örökölt betegsége sokat kínozta. Bízom abban, hogy könyvem ezeket a feltételezéseket teljesen szertefoszlatja. Amint a későbbi fejezetekben látni fogjuk az 1850-es évekre esnek BOLYAI JÁNOS nagyon fontos számelméleti kutatásai. Az elért eredmények azt bizonyítják, hogy utolsó éveiben is tiszta fejjel és töretlen optimizmussal dolgozott matematikai problémákon, a kutatás örömét akkor is élvezte. Igen szoros kapcsolatot tartott édesapjával, akivel kicserélhette gondolatait. Meg-meglátogatta idős apját s megszaporodnak az egymásnak írt matematikai tárgyú levelek. Számunkra különös szerencse, hogy nem csupán megbeszélték, hanem levélben is rögzítették gondolataikat. Így maradhattak meg azok napjainkig s meggyőzően mutatják, hogy BOLYAI JÁNOSt kora matematikájának minden ága érdekelte. A társadalmi kérdések boncolgatása kedvéért nem hagyta abba a matematikai munkálkodást. Természetes, hogy nem mondott le tudományának műveléséről az az ember, aki „... életének alfája és omegája a matematika", s aki „Úgy tartotta, hogy mindenféle emberi ismeretnek ez a tudomány biztosít megingathatatlan alapot. Szépsége utolérhetetlen, a benne való elmélyülés a legmagasabb élvezet és gyönyörűség" [6, 43 old.]. Többször is átolvasva az egész kéziratos hagyatékot számunkra inkább a matematikus BOLYAI került előtérbe az Üdvtan szerzőjének hátrányára. Ezért így módosítanám BENKŐ SAMU egyik mondatát [6, 273 old.]: „A matematika fejezetein töprengve élete végéig megőrizte a gondolkodás örömét."

1856. november 20-án nyolcvanegy éves korában apja „*bevégzé földi nagyszerű tevékenységét*". Az idős professzor halálakor János veszített a legtöbbet. Most már senki sem maradt, akivel legalább beszélgethetett volna.

1857 őszétől kezdve ő is folyton betegeskedett, szinte állandóan ágyban feküdt, de így is dolgozott, főleg matematikával foglalkozott. 1860 januárjában tüdőgyulladást kapott, s a hónap végén a marosvásárhelyi református egyház anyakönyvébe az akkori esperes feljegyezte, hogy 1860. január 27-én BOLYAI JÁNOS *nyug. Ingenieur kapitány agy- és tüdőgyulladásban végleg lezárta szemeit.*

1.3. A Bolyaiak alakja a szépirodalomban

BOLYAI JÁNOS emlékét a szép szó mesterei, irodalmunk nagyjai is megörökítették. Költőink, íróink – ha nem is tudnak az abszolút geometria világában BOLYAI JÁNOS gondolatai nyomába szegődni – verssel, prózával tisztelegtek emberi, erkölcsi nagysága előtt. A költői mércét BABITS MIHÁLY helyezte igen magasra még a század elején, 1911-ben a Fogarason írt BOLYAI című szonettjével. ADY ENDRE költői látomása után

„Megnyíltak lángolón előttünk
A Bolyai – s Csere sírok"

a BOLYAIak irodalmi hősökként is bevonultak a köztudatba.

ÁPRILY LAJOS A Fejedelemhez című, Bethlen Gábort dicsőítő ódájában (1922) a Bethlen-kollégium egykori diákjai között felvonultatja BOLYAI FARKASt is:

„És jön Tudósod, a számok óriása,
s hálát leróni, ím, elédbe lép,
a számlálhatatlan csillagokból hozza
a végtelenség szent üdvözletét."

Kortárs költőink közül SZILÁGYI DOMOKOS, SZÉKELY JÁNOS, TÓTH ISTVÁN, MANDICS GYÖRGY, M. VERESS ZSUZSANNA és sokan mások állítottak örök emléket BOLYAI JÁNOSnak. NÉMETH LÁSZLÓ drámában eleveníti föl a két BOLYAI alakját, KOCSIS ISTVÁN pedig monodrámában idézi BOLYAI JÁNOSt.

Sajnos BOLYAI JÁNOS (és Farkas) emberi magatartását több, szenzációra éhes szerző előnytelen színben tünteti fel. Ezek egy részének a hatására a köztudatban elmélyültek azok a kitalált ferdítések, amelyek méltatlanok két tudósunk emlékéhez. Egyes regényírók (akiknek „munkáját" el kellene már feledni s nem újra meg újra kiadni) költői szabadságjogukkal visszaélve a felszínen érvényesülő (vagy még inkább képzelt) tulajdonságokat dramatizálják. Kár, hogy P. STÄCKEL nagyon fontos könyvében is találkozunk olyan észrevételekkel, amelyek nem használtak BOLYAI emberi megítélésében. Az olyan mondatok, mint például a [106, 1:96]-on olvashatók, kétségtelenül táplálták a rosszindulatú mendemondák terjedését.

1.4. A Tér abszolút igaz tudománya

A következőkben áttérünk a matematikai irodalom egyik legkiemelkedőbb alkotásának, BOLYAI JÁNOS egyetlen nyomtatásban megjelent művének, az Appendixnek rövid méltatására. A szakirodalom gazdag az Appendix ismertetésében és értékelésében. Első részletező bemutatása JOHANNES FRISCHAUF (1837–1924) osztrák matematikustól származik, aki az 1871/72. tanévben már kurzusszerű előadást tartott a grazi egyetemen a nemeuklidészi geometriákról, főleg az Appendixből merítve anyagát [110]. FRISCHAUF előadását 1872-ben könyv alakjában is kiadta [44]. Itthon VÁLYI GYULA (1855–1913) a kolozsvári egyetem tanára ismertette először BOLYAI JÁNOS munkáját. VÁLYI a kolozsvári egyetem tanrendje szerint az 1891/92. tanév II. félévében hirdette meg először a „BOLYAI JÁNOS Appendixéről" c. kollégiumot, s ezt csaknem változatlan formában négyévenként többször megismételte [110, 122]. A század elején, 1906-ban ROBERTO BONOLA (1874–1911) írt egy sikeres könyvet a nemeuklidészi geometriáról, amelyben természetesen bemutatja BOLYAI művét is [21]. Szép számmal találunk magyar nyelvű ismertetéseket is [32, 33, 53, 59, 60, 61, 93, 108, 109, 110, 122, 127]. Ezért itt nem szükséges részletekbe bocsátkoznunk.

A geometriát tudománnyá a görög matematikusok fejlesztették. Első ismereteiket a tapasztalat útján szerezték. Az ilyen tulajdonságokkal való beható foglalkozás rávezette őket arra a felismerésre, hogy a puszta szemlélet még nem szülhet biztos ismereteket. Rájöttek a bizonyítás szükségességére.

A fejlődés EUKLIDÉSZ művében, az Elemekben érte el csúcspontját. EUKLIDÉSZ ebben a munkában a geometria olyan felépítését adta, amely napjainkig mintául szolgál valamely deduktív tudomány megalkotásához. Ennek lényege abban áll, hogy a tárgyalás alapjául kiválasztunk bizonyos számú alapfogalmat és egyszerű állítást, az axiómákat vagy posztulátumokat, és minden további fogalmat és tételt ezekből a logika szabályai szerint levezetve építjük fel a geometriát.

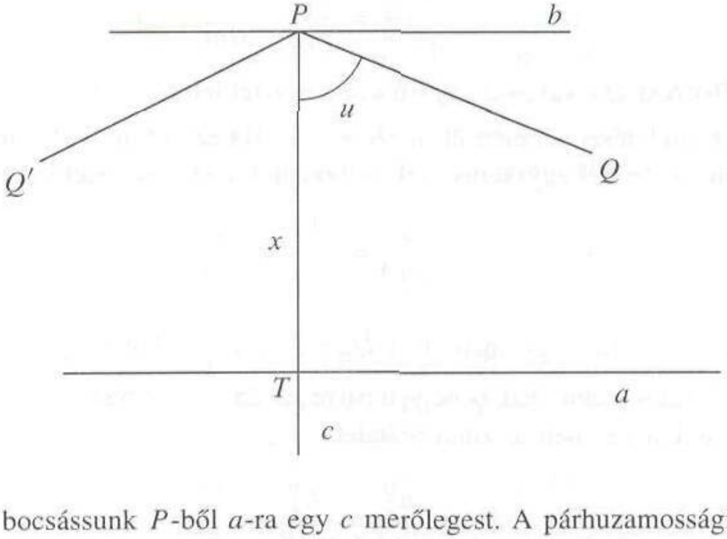
EUKLIDÉSZ alaptételei közül a párhuzamosságról szóló (az V. posztulátum, vagy egyes kiadásokban a XI. axióma) eléggé bonyolult fogalmazása miatt már az ókorban magára vonta a matematikusok figyelmét. A legrégibb bírálók nem látták eléggé „szemléletesnek" vagy eléggé „egyszerűnek", amit viszont egy axiómától általában elvárunk. Eleinte ezért megkísérelték egyszerűbben hangzó axiómával helyettesíteni. Ez a kritikai periódus nem sok újat hozott, még csak a felszínen mozgott, lényeges fejlődésre nem vezetett.

Érdekes eredményeket szolgáltattak azok a régi törekvések, amelyek bizonyítani akarták az V. posztulátumot a többi alaptételből. Ezek a kísérletek akkor mélyültek el, amikor a XVIII. század végétől indirekt úton próbálták a bizonyítást, vagyis amikor a matematikusok ellentmondást kerestek az V. posztulátum

tagadása és az euklidészi geometria többi axiómájából származó tételek közt. Sok volt a hibás bizonyítási kísérlet is, de az ellentmondásra való következtetés sehogy sem sikerült. Furcsa, a szemlélet számára szokatlan tételek adódtak, de ezek egymással szemben nem mutattak fel ellentmondást.

A XIX. század elején új gondolat kezdett megfoganni. A matematikusok ebben az időben is úgy jártak el, mint XVIII. századi elődeik, vagyis a geometria axiómarendszerében a párhuzamossági axiómát a tagadásával helyettesítették, s ebből az axiómarendszerből igyekeztek minél több új tételt levezetni, de most már nem azzal a céllal, hogy ellentmondásra jussanak, hanem azért, hogy ilyen módon egy új geometriát alkossanak. Ezt a célt sikerült elérni, ami azt is jelentette, hogy az V. posztulátum független a többitől, s ezért szükséges reá hivatkozni az euklidészi geometria felépítésében.

BOLYAI JÁNOS volt az, aki időben legelőször olyan általános geometriát épített föl, *amely az V. posztulátumot sem nem állítja, sem nem tagadja, hanem* mellőzi: úgy értelmezve a párhuzamosságot, hogy egybefoglalja az V. posztulátum állításának és tagadásának a lehetőségét. Eszerint ennek az általános, BOLYAI által abszolútnak nevezett geometriának sajátos esete mind az euklidészi (a $\sum$-rendszer), mind a nemeuklidészi vagy más néven hiperbolikus (az S-rendszer) geometria. BOLYAI nagy érdeme abban állt, hogy fölépítette az abszolút geometriát és azon belül a hiperbolikus geometriát.



Ábránkon bocsássunk P-ből a-ra egy c merőlegest. A párhuzamossági axióma nélkül az euklidészi geometria axiómái alapján következik, hogy c metszi a-t, és P-ben a c-re emelt merőleges nem metszi a-t.

A c merőlegest forgassuk a P pont körül az óramutató járásával ellenkező irányban. Az ilyen módon forgatott egyenes eleinte metszi az a egyenest, az elforgatott c egyenes valamely pillanatban először nem metszi a-t.

Két eset lehetséges.

Ez a pillanat éppen akkor következik be, amikor c egybeesik b-vel. Ez valósul meg az euklidészi geometriában.

Van azonban egy másik lehetőség is. Előfordulhat, s ezt a geometria többi axiómái megengedik, hogy már előbb bekövetkezik ez a pillanat, valamely PQ helyzetben. Ha ezt megengedjük, akkor szimmetria okokból P-n keresztül kell léteznie még egy ilyen tulajdonságú PQ' egyenesnek is, ha c-t ellenkező irányba forgatjuk. BOLYAI JÁNOS a PQ és PQ' egyeneseket nevezi a P-n keresztül a-hoz húzott párhuzamosoknak. Ebben az esetben PQ az elforgatott c-vel az u hegyesszöget zárja be, amely függ P-nek a-tól való x távolságától.

BOLYAI nem foglal állást e két lehetőséget illetően, s ilyenformán olyan tételekhez jut el, amelyek egyaránt érvényesek mind az euklidészi (ha az első lehetőséget fogadjuk el), mind a hiperbolikus geometriában (ha a második lehetőség mellett döntünk). Ezért nevezi az általa felfedezett geometriát abszolút geometriának.

Szemléltessük az elmondottakat egy példán. Az általános háromszögre vonatkozó szinusz-tétel az abszolút geometriában a következő (Appendix 25.§):

$$\frac{Oa}{sinA}=\frac{Ob}{sinB}=\frac{Oc}{sinC},$$

ahol BOLYAI Oa-val az a sugarú kör kerületét jelöli.

Az euklidészi geometriában $Oa=2\pi a$. Ha ezt a fenti összefüggésbe helyettesítjük és 2π-vel egyszerűsítünk, megkapjuk a szinusz-tétel ismert alakját:

$$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}.$$

A hiperbolikus geometriában $Oa=2\pi k\,sh\,\frac{a}{k}$, ahol k egy, a teret jellemző pozitív valós szám. Ezt behelyettesítve és $2\pi k$-val egyszerűsítve megkapjuk a hiperbolikus geometria szinusz-tételét:

$$\frac{sh\frac{a}{k}}{sinA}=\frac{sh\frac{b}{k}}{sinB}=\frac{sh\frac{c}{h}}{sinC}$$

[21, 104 old.].

Írjuk fel ismét a hiperbolikus geometria alapösszefüggését, amely a párhuzamossági szög és párhuzamossági távolság között fennáll (1.2.§):

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2}=e^{\frac{x}{k}}.$$

E szerint a képlet szerint, ha $x \to 0$, akkor $u \to \frac{\pi}{2}$. Hasonlóképpen, ha $k \to \infty$, akkor is $u \to \frac{\pi}{2}$. Az euklidészi geometriában a párhuzamossági szög $u=\frac{\pi}{2}$ bármely x-re, ezért a fenti két eredmény így értelmezhető: a hiperbolikus síkon „kicsiben" ($x \to 0$) közelítőleg az euklidészi geometria érvényesül, és az S rendszer geometriája közeledik a $\sum$ rendszeréhez, ha az S rendszer állandója, $k \to \infty$.

BOLYAI volt az első, aki kimondta, hogy a nemeuklidészi geometria éppen úgy ellentmondásmentes, mint az euklidészi (A bizonyítás csak másoknak sikerült később).

Fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy BOLYAI az Appendixben nemcsak a párhuzamosok kérdését oldotta meg, hanem a kör négyszögesítésének 2000 éves problémájával kapcsolatban is igen figyelemreméltó következtetésekre jut. Kimutatta ugyanis, hogy a körnégyszögesítés a hiperbolikus geometriában bizonyos esetekben elvégezhető, vagyis az S-rendszerben szerkeszthetünk egy adott körrel egyenlő területű négyzetet.

Az igaz, hogy BOLYAI ezzel nem azt igazolta, hogy az euklidészi síkban ez a probléma megoldható vagy sem, hanem azt, hogy az S-rendszerben van négyszögesíthető kör. Azt is kijelenti, hogy éppen ez alkotja a nemeuklidészi geometriának azt a sajátosságát, amely ezt az euklidészi rendszertől megkülönbözteti. BOLYAI ezt a gondolatot az Appendix utolsó, 43. paragrafusában a következő tömör formában fejezi ki: *„vagy érvényes Euklidész XI. axiómája, vagy pedig lehetséges a kör mértani kvadratúrája."*

Tehát a kör négyszögesítésének lehetséges volta kizárja a XI. axiómát! Elmondhatjuk, hogy aki legelőször belátta, hogy a kör négyszögesítése problémájának megoldása az euklidészi síkban lehetetlen, az BOLYAI JÁNOS volt.

Annak kimutatását, hogy az euklidészi geometriában a kör négyszögesítésének kérdése lehetetlen, a matematikatörténetben LINDEMANN német matematikusnak tulajdonítják, aki 1882-ben, tehát az Appendix megjelenése után 50 évvel később igazolta, hogy a π transzcendens szám. Hogy BOLYAI milyen elvi jelentőséget tulajdonított a kör négyszögesítése problémájának, onnan is kitűnik, hogy az Appendix címébe is belefoglalta azt [13, 14].

BOLYAI JÁNOS korszakalkotó felfedezésével új fejezetet nyitott a tudomány történetében. Az abszolút geometria mélyrehatóan befolyásolta a későbbi kutatásokat. Elsősorban természetesen a matematika fejlődésére volt hatással.

A nemeuklidészi geometria megalkotásának egyik alapvető következménye annak a ténynek a felismerése volt, hogy az euklidészi geometria rendszere nem az egyetlen elképzelhető geometriai rendszer. Létezhetnek más, matematikailag épp oly megbízható geometriai rendszerek. Mindenekelőtt G. RIEMANN (1826–1866) munkásságát kell megemlítenünk. Ő volt az, aki először vizsgálta egész mélységében a tér szerkezetét s a lehetséges geometriákat. Eredményei minden bizonnyal BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ munkáinak hatására alakultak ki, bár írásaiban nem említi egyik matematikus nevét sem.

Nagy szerepet játszott az Appendix az axiomatikus módszerek kidolgozásában és elterjedésében. Neki köszönhető, hogy a geometria axiómarendszerével, tehát tulajdonképpen egy sajátos axiómarendszerrel kapcsolatos vizsgálatok végül is az axiomatikus módszerre vonatkozó általános felismerésre vezettek. BOLYAI munkájával lezárultak azok az évezredes axiomatikus kutatások, amelyek a párhuzamosok problémájának megoldására irányultak. Ugyanakkor egész sorát nyitották meg az axiomatikus módszerrel kapcsolatos modern kutatásoknak. A nemeuklidészi geometriával szoros összefüggésben merült fel először az axiómarendszerek függetlenségének, ellentmondásmentességének, teljességének a kérdése.

Elvitathatatlan érdeme BOLYAInak, hogy ő adta a modellmódszer első alkalmazását, amikor az Appendix 21. §-ában kimutatja, hogy ha a paraszférán a paraciklust tekintjük egyenesnek, akkor a paraszférán az euklidészi geometria érvényes. A hiperbolikus térben modellt szerkesztett – a paraszférát –, amelyen az euklidészi geometria érvényes. Ez a fontos tulajdonság nagy szerepet játszik BOLYAI ellentmondásmentességi vizsgálataiban. A modellnek a létezése azt bizonyítja, hogy ha S ellentmondástalan, akkor ellentmondástalan a $\sum$ is. BOLYAI azonban $\sum$ ellentmondástalanságát feltételezte, nem is akarta bizonyítani. Ő a modellmódszert arra használta, hogy az S-ben érvényes tételeket a $\sum$-ban érvényes tételekből levezesse. Ez is figyelemre méltó, eredeti módszertani ötlet [60, 20 old.].

A múlt század második felében kezdték vizsgálni a nemeuklidészi geometria modelljeit. Ezen a területen A. CAYLEY (1821–1895), F. KLEIN (1849–1925) és H. POINCARÉ (1854–1912) szereztek érdemeket. Kiderült, hogy a hiperbolikus geometriát a pszeudoszféra egy véges darabján, az elliptikus geometriát (megalkotója RIEMANN) a gömb felületén lehet megvalósítani.

BOLYAI JÁNOS jegyzetei olyan észrevételeket is tartalmaznak, amelyek a jelenkori fizika számos alapvető kérdését is tükrözik. Geometriai vizsgálódásai alapján megsejtette, hogy a gravitáció és a geometriai tér szerkezete között belső összefüggésnek kell lennie. Ezt a gondolatot a következőképpen fogalmazta meg: „... *a nehézkedés törvénye is szoros öszve köttetésben foljtatásban tetszik (mutatkozik) az űr termeltével, valójával (alkatával) miljenségével...*" (491/2^{v}). Főképpen TORÓ TIBOR munkásságának köszönhetően ma már azt is tudjuk, hogy BOLYAI JÁNOS a fizika geometrizálásának a legelső megfogalmazója, előfutára [93, 119]. BOLYAI eszméi mélyen behatoltak a modern fizikába. Beszédes bizonyítéka az elmondottaknak az 1997. augusztus 13–16-a között Ungváron megrendezett nemzetközi Bolyai-konferencia, amelynek témája „A nemeuklidészi geometria a modern fizikában" volt. A nemeuklidészi geometriák alkalmazása a fizikában, a fizikai elméletek megalkotásában a XX. század jelentős megvalósításai közé tartozik. Az általános relativitáselmélet az, amely széles körben használja a nemeuklidészi differenciálgeometriát fizikai erőterek leírására. A gravitációs tér einsteini elméletének megfogalmazásához és fizikai jellemzéséhez görbült, tehát nemeuklidészi geometriai tér, a Riemann-tér szükséges, mely egyszerre megoldja a fizika és a geometria összekapcsolásának kérdését is, vagyis azt, amit általában a fizika geometrizálásának nevezünk – írja TORÓ [93, 139–140 old.]. A riemanni gondolatok későbbi továbbfejlesztése adta végül A. EINSTEIN (1879–1955) kezébe az általános relativitási elmélet felépítéséhez szükséges matematikai eszközt. A következő száz év alatt a matematikusok megteremtették a tér általános elméletét, s ez tette lehetővé, hogy kifejlődhessen az a matematikai apparátus, amelyre szüksége van a modern fizikának. Itt említjük meg, hogy DÁVID LAJOS Un precursore di Einstein címen olasz lapokban írt cikkeivel már 1924-ben rámutatott BOLYAI JÁNOSnak a relativitáselmélet megalkotásában játszott előfutár szerepére (DÁVID PÉTER közlése).

Tehát a nemeuklidészi geometria felfedezése egyike volt a tudománytörténet ama nagy eseményeinek, amelyeknek hatása nagy lendületet adott a fejlődésnek az egzakt tudományok valamennyi területén.

BOLYAI JÁNOS tisztában volt az Appendix jelentőségével. Ő előre tudta, hogy új világa majdan kihat egész szemléletünkre, befolyásolja az összes olyan tudományt, amelyekben a tér fogalma, szerkezete szerepet játszik. Arról is meg volt győződve, hogy műve tökéletes. Magabiztosan állította: „*Mindnyájan egyenlő, határtalanul fejlődő s növő szellemű tehetséggel vagy itélőképességgel bírunk, s mindenki előtt egyformán nyitva állt a természet véghetlen könyve – azonban a tanomat minden haladás mellett, 10.000 évig sem hiszem, hogy más ily tökéllyel elő állította volna*" (788/1). Azt is látta, hogy alkotása új korszakot nyit

a tudományban. „... *a rengeteg sok szükségest magában foglaló* – írja az Appendixről – *és ... a tanban a legnagyobbszerű időszakot kezdett vagy legalább előkészített ... munka ...*" (1309/3^v). Ide kívánkozik, bár a Bolyai-irodalomból jól ismert, János következő mondata is, melyben kifejezi örömét afelett, hogy az ő tér-tudománya is hozzájárult az emberiség előrehaladásához: „... *a teljes napfogyatkozás pedig ... örökre eltűnt. És a szerzőben él az a meggyőződés, hogy e tárgy tisztázásával a tudomány igazi gyarapításának, az ész művelésének, és így az emberi sors lendítésének egyik legfontosabb és leglényegesebb lépése megtörtént*". [106, 2:216], [12, K24/1] és (380/14).

1.5. A Responsio

BOLYAI JÁNOS másik nagy jelentőségű munkája a Responsio. Ebben a dolgozatban – amelyet PAUL STÄCKEL jelentetett meg nyomtatásban [104] – BOLYAI, korát megelőző gondolatokat vallott a komplex számok elméletében is [32, 110, 127].

A lipcsei Jablonowski Társaság pályázati kérdése, amelyre BOLYAI a Responsio című dolgozatát beküldte, a komplex számok szerkeszthetőségére várt feleletet. BOLYAI JÁNOS szerint a szerkeszthetőség itt mellékes probléma, ezzel szemben igen fontos a komplex számok precíz értelmezése, valamint az a kérdés, hogy a geometriában hol van szerepük. A Responsio mindkét vonatkozásban új eszméket tartalmaz.

Fontos megjegyeznünk azt is, hogy a Responsio egyik képlete szerint BOLYAI JÁNOS is rendezett számpárnak tekintette a komplex számokat, és posztulálta a körükben végzett összeadás és szorzás formális szabályait, bár nála a komplex számnak rendezett számpárként való értelmezése nem öltött még olyan végleges formát, mint HAMILTONnál.

A Responsio legértékesebb része a 9.§. Ebben a paragrafusban BOLYAI a képzetes mennyiségeknek a geometriában játszott fontos szerepére mutat rá. Az Appendix 31.§-ára való hivatkozással megemlíti a hiperbolikus geometria két képletét, feleleveníti a hiperszféra fogalmát, majd utal arra, hogy az abszolút trigonometria formailag megegyezik a $\frac{k}{i}$ sugarú gömb trigonometriájával, ahol $i = \sqrt{-1}$, k pedig a hiperbolikus állandót jelenti. Ezekkel a vázlatosan közölt észrevételekkel azt óhajtotta igazolni, hogy az i képzetes egységnek fontos, addig ismeretlen geometriai alkalmazása tárult fel az ő rendszerében.

A pályamunka bírálói nem értették meg BOLYAI JÁNOS szűkszavú fejtegetéseit. Ezen talán nem is csodálkozhatunk, hiszen BOLYAI a Responsióban föl-

tételezte az Appendix ismeretét. De hol álltak a matematika történetében igen szerény helyet elfoglaló bírálók az abszolút geometria fogalmaitól?

1.6. Prioritási kérdések

A matematika és a tudományok története általában gyakran teszi fel egy-egy felfedezéssel kapcsolatban a prioritás kérdését. BOLYAI JÁNOS, LOBACSEVSZKIJ és GAUSS esetében is sok cikket írtak már az elsőbbség problémájáról. A prioritási viták sokszor értelmetlenek és meddőek, a tényeket viszont jó tudnunk. A különböző tudósok műveinek összehasonlítása tanulságos lehet. Így van ez a mi esetünkben is.

A nemeuklidészi geometria megteremtése ugyanakkor jó példa arra vonatkozóan, miszerint a tudományban gyakran megtörténik, hogy ugyanahhoz a felfedezéshez különböző országok tudósai közel egy időben jutnak el. Némelykor az ilyen egybeesést puszta véletlennek tekinthetjük, máskor azonban, amint BOLYAI FARKAS írta fiának: „Az eszméknek mintegy megvan a maguk korszaka, amikor különböző helyeken egyidőben fedeztetnek fel, amint tavaszkor az ibolyák mindenütt kikelnek, ahol csak süt a nap".

A prioritásokat viszont előbb-utóbb ki kell mondani. Szögezzük le mi is a nemeuklidészi geometria megszületésének időpontjait. Úgy érezzük, hogy erről a kérdésről feltétlenül szükséges beszélnünk. Főképpen azért, mert az utóbbi évtizedekben több, BOLYAI JÁNOS érdemeit kisebbítő vagy egyszerűen mellőző nyomdatermék látott napvilágot még magyar nyelven is. Amint VEKERDI LÁSZLÓ [123] tanulmányában rámutat már, DIRK J. STRUIK furcsán, bántóan intézi el kis matematikatörténetében [107] a Bolyaiakat. Súlyos tévedéseket olvashatunk MORRIS KLINE 1972-ben megjelent tekintélyes könyvében. Ő egyszerűen GAUSS közvetlen vagy közvetett hatására vezeti vissza BOLYAI JÁNOS és LOBACSEVSZKIJ egész munkásságát. Azt írja [77, 878 old.], hogy mind BOLYAI, mind LOBACSEVSZKIJ sokat köszönhet GAUSSnak. KLINE szerint BOLYAI JÁNOS felé apja (BOLYAI FARKAS) közvetített, LOBACSEVSZKIJnek pedig GAUSS régi barátja, JOHANN MARTIN BARTELS (1769–1836) (aki Kazánban LOBACSEVSZKIJ tanára volt) juttatta el GAUSS eszméit. KLINE „sötét gyanúját" (VEKERDI) aztán befolyásos munkájából minden kritika nélkül mások is átveszik. Így például JEREMY GRAY először az 1979-ben megjelent [54] könyvében, majd ugyancsak 1979-ben a legrangosabb matematikatörténeti szakfolyóiratban, a Historia Mathematicaban publikált fontos [55] tanulmányában a „tulajdonképpeni" nemeuklidészi geometria egyik „előkészítőjévé" fokozza le BOLYAI JÁNOSt.

A KLINE és GRAY által hangoztatott félrevezető vélemények már a múlt század vége felé felmerültek, amikor megkezdődött GAUSS hagyatékának folyamatos közzététele, s egyesek – amint látjuk – még ma is őt tekintik az első nemeuklidészi geometria kezdeményezőjének. Ennek a fölfogásnak a legsúlyosabb szavú képviselője FELIX KLEIN volt, aki a göttingeni egyetemen az 1889–90. tanévben tartott előadásaiban fejtette ki elfogult nézeteit, GAUSS szerepét megalapozatlan indokok alapján az első helyre állítva. Előadása 1893-ban nyomtatásban is megjelent. Igaz, hogy később KLEIN némileg változtatott GAUSS-centrikus fölfogásán, de állítása, amely szerint „Semmilyen kételyünk nem lehet afelől, hogy GAUSS befolyása ösztönözte LOBACSEVSZKIJ és BOLYAI kutatásait" sajnos még napjainkban is hat.

FELIX KLEIN véleményét GAUSS 1832. február 14-én GERLINGhez intézett, s az 1.2. §-ban már idézett levelének következő részlete befolyásolta: „Szerzője ... fia egyik ifjúkori barátomnak, akivel 1798-ban gyakran beszélgettem erről a dologról...". Érdekes, hogy a három héttel később, 1832. március 6-án BOLYAI FARKAShoz küldött levélben [101, 109 old.] GAUSS nem célzott arra, hogy hajdani beszélgetéseik a nemeuklidészi geometriára is kiterjedtek, holott ilyen célzást ezúttal is igen természetesnek vennénk. Ma úgy tudjuk, hogy kettejük egykori beszélgetései kizárólag a tér filozófiai problémái körül forogtak és valamilyen nemeuklidészi geometria kidolgozásának a gondolata föl sem merült bennük.

Azt, hogy LOBACSEVSZKIJ felé BARTELS nem közvetíthetett, D. M. BURTON [26, 558 old.] azzal magyarázta, hogy LOBACSEVSZKIJ 1823-ban még „bizonyítja" az V. posztulátumot, tehát ha GAUSS eszméi eljutottak volna hozzá, akkor erre nem került volna sor. (Ugyanez BOLYAIról is elmondható. Bécsi évei alatt először ő is – igaz, hogy csak rövid ideig – az V. axióma bebizonyításával próbálkozott.) J. GRAY egyik lábjegyzetéből [54, 112 old.] azt is megtudjuk, hogy BARTELSnek a kazáni tartózkodása során GAUSSszal folytatott levelezésében sem találunk arra vonatkozó bizonyítékot, amely szerint a két matematikus a párhuzamosak problémájáról értekezett volna.

BOLYAI JÁNOS esetében a KLEIN–KLINE–GRAY-féle képtelen állítást nálunk SZÉNÁSSY BARNA cáfolta szabatos érveléssel [111, 68 old.] és [114]. VEKERDI LÁSZLÓ szavaival „csak föl kellene lapozni a BOLYAI–GAUSS levelezést s nyomban kiderülne, hogy efféle közvetítés lehetetlen...". Valóban, ha átolvassuk ezt a fontos [101]-es kiadványt, nyomban kiderül, hogy GAUSS nemcsak göttingeni éveik alatt, de még 1804-ben is igazolandónak tartotta Euklidész V. posztulátumát, nem pedig a tagadására kívánt új geometriát fölépíteni [101, 82–83 old.], s nagyon megritkuló levelezésükben ezentúl GAUSS egy szóval sem utal a témára egészen 1832-ig, amikor BOLYAI FARKAS elküldi neki János kinyomtatott munkáját. Az 1799. december 16-án írott [101, 36–37 old.] levélben is arról az

euklidészi párhuzamossági axiómát helyettesítő axiómáról van szó, amelyet úgy szokott a szakirodalom idézni, hogy bármely háromszögnél van nagyobb területű háromszög.

GAUSS milyen fölfedezését közvetíthette tehát BOLYAI FARKAS a fiának, ha Göttingenben nem beszélgettek „erről a dologról", ha a tárggyal kapcsolatos két GAUSS-levélben nincs szó a nemeuklidészi geometriáról, s végül, ha maga GAUSS elismeri, hogy 1798-ban „... eszméim még távol voltak attól a kialakulástól és érettségtől, melyet azoknak ez a fiatalember adott a saját elmélkedései által"? [22, 387 old.] Nyugodtan mondhatjuk, hogy nem volt mit „közvetítenie" BOLYAI FARKASnak. Ennek ellenére, amint már hangsúlyoztuk, az apának fontos szerepe volt az Appendix létrejöttében.

Sajnálatos, hogy GAUSS GERLINGhez írott levelének egy mondata megalapozatlanul befolyásolta az utókor véleményét BOLYAI JÁNOS kárára.

Az elmondottak arra késztetnek, hogy munkánkba beiktassuk a nemeuklidészi geometria felfedezésének történetét. Ugyanakkor érveléseinket újabb, a kéziratokból kiolvasott adatokkal is alátámasztjuk. BOLYAI JÁNOS hagyatékából néhány olyan följegyzés is előkerült, amelyekből egyértelműen következtethetünk geometriája megszületésének és az Appendix elkészülésének pontos időpontjaira. Ezek, az eddig is ismert adatokat kiegészítve, nemcsak azt bizonyítják meggyőzően, hogy ő másoktól függetlenül, önállóan fedezte föl geometriai rendszerét, de azt is, hogy a tér abszolút igaz tudományának gondolata az ő fejéből „pattant ki" először.

Vizsgáljuk meg tehát rendre a három matematikus följegyzéseit, munkájuk keletkezésének időpontjait, s ezek összehasonlítása segítségével próbáljunk hiteles képet alkotni az elsőség kérdésében.

A paralelák kérdésének kutatását BOLYAI JÁNOS 1819–1820 táján kezdte el Bécsben, de ekkor még kifejezetten apja nyomdokain haladt. Ugyanis az euklidészi párhuzamossági axiómát próbálta bebizonyítani. 1820-ban azonban már kezdett megérlelődni benne az a gondolat, hogy az euklidészi párhuzamossági axióma független a többitől, következésképpen azok alapján nem bizonyítható be. Jól ismert, hogy BOLYAI JÁNOSnak a hadmérnöki akadémián 1820-ban készített rajzairól kiolvashatók geometriájának első gondolatai (1.2.§). Ez az Appendix megalkotásának kezdete.

Az elkövetkező években biztosan sok mindent átgondolt BOLYAI a térelméletről, mert 1823-ban már teljesen kibontakoztak az új geometria körvonalai. November 3-án kelt a nevezetes „temesvári levél". Felfedezésének ezt az időpontját több későbbi írásában is megerősíti. Így például az olmützi kérvényében, valamint a következő sorokban: „*Csak még azt jegyzem erre nézve meg, hogy én ebbéli munkámat, melynek lényege már 1823 – év végével hatalmamban volt...*"

([9], hátsó borítólapjának belső oldala), s többek között a következő mondatban is: „*még fiatal koromban 1823-ban, tehát több évekkel a Tentamen kijövetele előtt átláttam s föl is jegyeztem volt*" (837/1^v). A már kidolgozott elméletét 1825 elején mutatja meg édesapjának, 1826-ban pedig munkája német változatát átadja ECKWEHR századosnak. Végül az Appendix különlenyomata 1831 áprilisában látott napvilágot. BOLYAI JÁNOS 1834 körül írt, erre vonatkozó nyilatkozata: „*Az itt következő tudományág, ..., alapvonalaiban már az 1831. év elején latin nyelven jelent meg .... Ennek az elméletnek fő eredményeire már több mint 10 évvel ezelőtt jutottam*" [106, 1:221].

A Tér tudománya természetesen már az 1831 előtti években teljesen elkészült. Több olyan dokumentumunk van, amelyek ezt bizonyítják.

Az Appendix egyik példánya éppen BOLYAI FARKASnál volt, igaz, hogy nem végleges formában. Ez valószínű, hogy a fiával való 1825 évi találkozásuk alkalmával maradt Marosvásárhelyen. Hogy valóban Marosvásárhelyen volt ez a példány, arról BOLYAI FARKAS egyik, 1830. június 23. előtt (pontos dátumot nem ismerünk) írt leveléből értesülhetünk. A már 1953 óta ismert [17, 377 old.] s mégis elég ritkán idézett levél mondatai: „Jánosnak is mindjárt írok, s ma vagy holnap az Aradra indulóktól küldök, s elkérem az ő (a maga nemében egyetlen) munkáját, melyet az Appendixhez kívánnék nyomtattatni. Megvan nálam, de tsak impure". BOLYAI FARKAS akkor nyilvánvalóan a már nyomdakész Appendixet kérte el fiától.

A hagyaték még fel nem dolgozott lapjait forgatva két olyan oldalra is bukkanunk, amelyeken levő följegyzések ugyancsak perdöntőek ebben a kérdésben. Itt BOLYAI JÁNOS maga tanúsítja, hogy az Appendix már 1829-ben készen volt. Mindkét följegyzésben arra a tényre hivatkozik, amely szerint a Tentamen kiadásához szükséges nyomtatási engedélyt már 1829-ben (okt. 12) kiadták a hatóságok [10], ahhoz pedig a műnek készen kellett lennie. Az elég nehézkes fogalmazású írásokból, néhány rokon értelmű szót elhagyva, nemcsak a számunkra legfontosabb mondatot ragadjuk ki, hanem hosszabban idézünk, mert figyelemre méltónak tartjuk a többi részeket is.

„... *a rengeteg sok szükségest magában foglaló* – írja BOLYAI az 1309/3^v oldalon – *és* EUKLID *sőt* ÁDÁM *óta a tanban a legnagyobbszerű időszakot kezdett vagy legalább előkészített Marosvásárhelyt, mint a munka törvényes elővizsgálatja vagy recensioja időszám vagy határozatjából kiviláglik már 1829-ik évben készen volt vagy állott, bár is sokféle más akadályok miatt csak az 1832-ik évben megjelent Tentamen általában érdemlettül, rengetegül és a legmélyebben tisztelt és szeretett szerzője s Édes Atyám több magyar, latin és német munkái értelme és szellemében szólva, nagyobb csodára lekötelezve mint semmiből valamit*

teremteni...". Az a fiú ír így apjáról – még több más helyen is –, akit a lélek mélyét alig vizsgáló életrajzírók sokszor annyira sötét színben állítottak elénk.

Ennek az oldalnak, amelyet különben szép, nagy betűkkel írt BOLYAI, az az érdekes sajátja, hogy alulról fölfelé haladva kell olvasni (**1. ábra**).

1. ábra (1309/3^v)

BOLYAI az alábbi, 1848 után keletkezett, igen érdekes jegyzetében ismét hivatkozik az 1823. évre s ugyanakkor az Appendixre vonatkozó más, fontos megjegyzéseket is tesz: *„És így elég csodálatos, nevezetes és különös az, hogy bár is az Appendix lényegére nézve már 1823-ban megszületett, 1829-ben a Tentamen kihirdetés s kinyomtatásra a könyv vizsgáló Bizottságtól szabadságot nyert, már 1833-ban* {ez nyilvánvalóan elírás} *megjelent s több híres és részint Nagy nyitanászoknak, mint* LITTROW, ETTINGSHAUSEN, *sőt maga egy* GAUSS*nak is kezükben járt, – bár is az Appendix után más különösen derék más is jelent meg* LOBACSEVSZKIJ*től ugyanazon tárgyról, mind azóta is még sem találkozott senki, ki annak hatalmas eszközével felszerelve segítettné, vagy annak alapján is, a* Δ*-tant illő, teljes, tökélyes idomban előadta s az a véges vagy véghetetlensége közötti eldönthetés lehetlenségét szigorral megbizonyította volna s így végre e főfontosságú, már az Appendixben említett s megígért hiány kipótlása is csakugyan nekem maradott vagy rámháramlott és föladatnak is megfejtése s homályának végképpeni elenyésztetése, s az által az egy végtelen tengerként Világhordozó űr lényege főfontoságú tárgyának a koronát vagy koszorút föltevése*" (786/2).

Ezek a följegyzések (amelyekhez még a következő, BOLYAI JÁNOSnak a Tentamenről írt félmondatát is csatoljuk: „ *... censurae dato iam anno 1829*" (1373/22^v)) egyértelműen tanúsítják, hogy az Appendix 1829-ben BOLYAI JÁNOSnál már nemcsak „impure", hanem kinyomtatásra teljesen kész állapotban megvolt. Végleges elkészülése történetének igen fontos láncszemét képezi BOLYAI fent idézett két írása. Maga a mű egész anyaga viszont már több évvel korábban, 1824-ben készen volt. Erre BOLYAI JÁNOStól származó egyik levél alapján következtethetünk. A levélre, amelyet János 1855. október 4-én írt apjához [17, 414 old.], SZÉNÁSSY BARNA hívta fel a figyelmünket [19, 31–32 old.]: *„A* GAUSS *régi leveleiben, mint már akkor rögtön is mondottam, úgy emlékezem még 1824-ben észrevettem, hogy azt ő is átlátta, hogy a lapi* Δ {síkháromszög} *terje* {területe} *ha mindenik oldal* $\to \infty$ *is, S-ben csak vég-határos* {véges}".

SZÉNÁSSY, miután GAUSS BOLYAI FARKAShoz írt leveleit is áttanulmányozta, megállapítja, hogy „1824-ben BOLYAI JÁNOS már ismerte a hiperbolikus sík háromszögének területi képletét. Ez pedig azt jelenti, hogy összeállította az Appendix egész anyagát, ugyanis e formula tanulmánya utolsó, 43.§-ában szerepel. Összegezve a mondottakat: mai tudásunk szerint BOLYAI JÁNOS 1820 és 1824 között összeállította térelméletének anyagát".

Ezt a következtetést teljes mértékben elfogadhatjuk, hisz ha BOLYAI 1824-ben még nem készíti el fölfedezésének egy kézírásos fogalmazványát, akkor nem lett volna mit megmutatnia 1825-ben apjának, sem mit átadnia 1826-ban volt bécsi tanárának, WOLTER VON ECKWEHRnek.

Igen gazdag irodalom segít N. I. LOBACSEVSZKIJ fölfedezésének időrendűségi kérdésében. Ő is az 1820-as évek során kezdett alaposabban foglalkozni a párhuzamosok problémájával. Aztán az évtized utolsó két évében 1829-ben és 1830-ban a Kazáni Hírnök (Kazanszkij Vjesztnyik) különböző (pontosan az 1829-es évfolyam 2., 3., 4., 11., 12. és az 1830-as évfolyam 3., 4., 7., 8.) számaiban A geometria alapjairól címmel teszi közzé munkájának eredményét egy hosszabb értekezésben [39, 1–66 old.]. Ezt a munkát, amelyben LOBACSEVSZKIJ kidolgozta a geometriára vonatkozó új gondolatait és nézeteit, tekinti a szakirodalom a nemeuklidészi geometria első publikált művének. Ha előkeressük LOBACSEVSZKIJ nevezetes munkáját, azonnal szembetűnik, hogy nincs valami rendben az 1829-es megjelenéssel kapcsolatban, azaz pontosabban nem 1829 LOBACSEVSZKIJ dolgozatának megjelenési éve, amint azt a legtöbb matematikatörténeti könyvben olvashatjuk. Ugyanakkor BOLYAI JÁNOS Appendixe sem 1832-ben jelent meg először. A valóság az, hogy LOBACSEVSZKIJ munkájának utolsó része 1830 augusztusában jelent meg. BOLYAI Appendixe, igaz, „különlenyomatban", de nyomtatásban 1831 áprilisában látott „*napfényt*". Következésképpen még egy év különbség sincsen a matematika két nagy alakja művének megjelenése között, nemhogy három esztendő, amit olyan szívesen hangoztatnak egyesek (például V. F. KAGAN is [17, 102 old.]).

Az 1829–30-as éveket megelőzően LOBACSEVSZKIJnek 1819-ben volt egy kézirata, amelynek A geometria alapjai címet adta. Valószínű, hogy ez annak a munkának volt első változata, amelyet Geometria címmel 1823-ban adott be államköltségen való kinyomtatásra. A jegyzet kiadására nem kapott engedélyt. Érdekes, hogy LOBACSEVSZKIJ kéziratát 1898-ban megtalálták, s KAGAN véleménye szerint a Geometriában többé-kevésbé látható már a későbbi LOBACSEVSZKIJ [90]. Tudjuk azt is, hogy 1823-ban egyetemi előadásain még csak azt állapította meg, hogy a párhuzamossági axióma bizonyítása lehetetlen.

1826. február 11-én (23-án) LOBACSEVSZKIJ előadást tartott a kazáni egyetem fizika-matematika karán a geometria alapjairól a következő címmel: Exposition

succinte des principes de la géometrie avec une démonstration rigoureuse des paralléles (A geometria alapjainak rövid kifejtése a párhuzamosok törvényének szigorú bizonyításával). Sok bizonytalanság, találgatás látott napvilágot ezzel az előadással kapcsolatban. Szövege ui. (akár BOLYAI JÁNOS ECKWEHRnek átadott írása) elveszett, de mint LOBACSEVSZKIJ saját maga közli, az 1829–30-ban közzétett értekezésének egyik része kivonat az Exposition succinte-ből. Arra vonatkozóan, hogy pontosan melyik az a rész, KAGAN is bizonytalan [90, 17 old.].

Az Exposition succinte címe bizonyos zavart kelt, jegyzi meg KAGAN, és kísérletet tesz annak megmagyarázására, hogy LOBACSEVSZKIJ dolgozatában nem a párhuzamosok axiómájának bebizonyítását tűzte ki célul, sőt bántó elfogultsággal azt is kijelenti, hogy „... az egész anyag, amelyet BOLYAI az Appendixben később kifejt, már világosan helyet foglal az Exposition succinte-ben" [17, 110–111 old.]. Mélyen hallgat KAGAN arról az „apróságról", amit viszont F. ENGEL (1861–1941) 1899-ben ugyancsak megemlít [39, 372 old.], hogy amikor LOBACSEVSZKIJ *A geometria alapjairól című munkájában az 1826-os* Exposition succinte-t idézi, annak címéből egyszerűen kihagyja a mondat második, baljóslatú felét „avec une démonstration rigoureuse des paralléles". Ezt – úgy véljük – nem lehet véletlennek tekinteni. Amint ENGEL is megjegyzi: „Mindenesetre itt még visszamaradt egy kis tisztázni való". A fenti félmondat kihagyása – olvashatjuk SCHLESINGER LAJOSnak BOLYAI JÁNOS centenáriumi ünnepségén Kolozsvárott tartott Emlékbeszédében – feljogosít arra a feltevésre, hogy LOBACSEVSZKIJnek az a belátása, hogy az új geometriai rendszer egymagában fennállhat, 1826-ban még nem érlelődött meg. LOBACSEVSZKIJ bizonyára hamarosan rájött „a párhuzamosok tételének szigorú bizonyításában" elkövetett logikai hibára, és azután többet arról nem beszélt.

Nincs szándékunkban a zseniális LOBACSEVSZKIJ érdemeit kisebbíteni, de a tényeket sem hallgathatjuk el, különösen ha azokból eddigi értelmezésük miatt félreértések származhattak.

Az elmondottak alapján BOLYAI JÁNOS személyi prioritása minden kétség felett áll. A geometria alapjairól című munka közlése pedig LOBACSEVSZKIJnek a publikálás formális prioritását biztosítja néhány hónappal. Ha figyelembe vesszük az információ múlt század elején való terjedési sebességét, ez a különbség teljesen elenyészőnek tekinthető. A hírközlés lassúsága ellenére az Appendix Marosvásárhelyről igen korán (előbb, mint LOBACSEVSZKIJ munkája) eljutott a nagyvilágba. Ezt a „matematikai nagyvilágot" akkoriban kétségtelenül GAUSS jelentette, s amint tudjuk, ő már 1832 februárjának első napjaiban olvasta BOLYAI művét (létezéséről 1831 közepe óta tudott), sőt GERLINGet is azonnal tájékoztatta erről. De a Tentament függelékével együtt megjelenése után Bécsbe ETTINGSHAUSENnek is elküldték.

A tárgyilagosság kedvéért még tegyük hozzá, hogy A geometria alapjairól című munka némely bizonyítása még nem teljes, vagy éppenséggel hiányzik [33, 167 old.]. Azt, hogy írásán még van csiszolni való, LOBACSEVSZKIJ is elismeri, amikor 1840-ben így ír a Geometriai vizsgálatok bevezetőjében: „Saját első próbálkozásom a geometria alapjairól 1829-ben jelent meg a Kazáni Hírnökben. Ezután, arra törekedve, hogy az összes követelményeknek eleget tegyek, hozzáfogtam e tudományág teljes kidolgozásához". [90, 41 old.]. Ezenfelül művét LOBACSEVSZKIJ orosz nyelven írta, az teljesen hozzáférhetetlen maradt a nem orosz matematikusoknak. De az orosz tudósok sem értették meg LOBACSEVSZKIJ munkáját. Negatív véleményt adott erről M. V. OSZTROGRÁDSZKIJ és V. J. BUNYAKOVSZKIJ is. Ugyanakkor BOLYAI az ő felfedezését kifogástalan latinsággal (majd németül) és az előállítás felülmúlhatatlan tökéletességével írta le. Az Appendix elismertetése is sok akadályba ütközött. Ismerjük a legkompetensebb bíró, GAUSS „dicséretét" s aztán teljes hallgatását. Az Appendixet többen is olvasták, (W. VON ECKWEHR, G. A. GREISINGER, A. ETTINGSHAUSEN, E. ZITTA, C. L. GERLING, J. J. LITTROW) s bár közöttük egyetemi tanárok is voltak, sajnos nem tudták befogadni az új eszméket.

LOBACSEVSZKIJ az 1830-az években több dolgozatot írt geometriájáról a Kazáni Egyetem Tudományos Naplójában, de Crelle közismert folyóiratában franciául is közölt [87, 88], 1840-ben pedig németül teszi közzé a Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien című művét. Felfedezését ebből a munkából ismerte meg GAUSS, BOLYAI JÁNOS, BOLYAI FARKAS. A matematikus világ figyelmét LOBACSEVSZKIJ műveire GAUSS leveleinek 1865-ben történt közzététele hívta fel. Ezekben az években kezd ismertté válni a BOLYAI név is. A két BOLYAI néhány matematikai eredményével H. R. BALTZER (1818–1887) Die Elemente der Mathematik (1860., 1862.) című tankönyvéből ismerkedhettek meg a matematikusok. Az Appendix az 1867. évben vált hozzáférhetőbbé a tudományos világ számára, amikor megjelent G. J. HOÜEL (1823–1886) francia fordítása. A múlt század utolsó hatvanas és első hetvenes éveinek matematikusai mind az Appendixből, mind a Geometriai vizsgálatokból szereztek tudomást a nemeuklidészi geometriáról. LOBACSEVSZKIJt azonban gyakrabban idézték, értekezései többször jelentek meg, az oroszok maguk is nagyobb gondot fordítottak kiváló matematikusuk elismertetésére. Ezért jó ideig a nemeuklidészi geometriát LOBACSEVSZKIJről nevezte a tudós világ. Csak 1894-ben sikerült magyar matematikusoknak elérniük, hogy BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ neve világszerte egyenlő megbecsülésben részesüljön.

GAUSS hagyatékának folyamatos közzététele során – bár a „BOLYAI – LOBACSEVSZKIJ-geometria" elnevezés megmaradt – a nemeuklidészi geometria

felfedezése elsőbbségének a kérdésében a súly kezdett áttolódni GAUSS személyére, és egyesek – amint már írtuk – ma is őt tekintik az első nemeuklidészi geometria kezdeményezőjének. Akik ezt a felfogást vallották (F. KLEIN, F. ENGEL) és vallják ma is (M. KLINE, J. GRAY, D. BURTON) GAUSS rendkívül gazdag levelezésére [22, 23, 24, 25] és hagyatékára hivatkoznak, ugyanakkor figyelmen kívül hagyják BOLYAI JÁNOSnak apjához 1823. november 3-án írott sorait.

Valóban meglepő lehetett a GAUSS-hagyaték tanulmányozása során felfedezni azokat a leveleket, amelyekben „a matematika fejedelme" több számottevő matematikusnak eléggé nyíltan írt a nemeuklidészi geometria lehetőségéről, miközben e témáról életében soha semmit sem hozott nyilvánosságra. GAUSS nem akart vitás témával a közvélemény elé állni. Félt a „beotiaiak kiabálásától" és a „darazsak fullánkjától", ha titkát nem tartaná meg magának.

GAUSS rendkívül gazdag hagyatékában több olyan írást találunk, amelyek valamiképpen kapcsolódnak a geometria alapjaihoz, illetve a nemeuklidészi geometria gondolatához. Különösen kiterjedt levelezésében többször érinti a paralelák problémakörét. A tárgyunkhoz tartozó levélrészleteket sokszor elemezték már, s a [52, 157–268 old.]-ban minden idetartozó írást megtalálhatunk. GAUSS legfontosabb levelező társai BOLYAI FARKAS, W. OLBERS (1758–1840), CH. L. GERLING, F. A. TAURINUS (1794–1874), F. K. SCHWEIKART (1780–1859), F. W. BESSEL (1784–1846) és H. SCHUMACHER (1780–1850) voltak.

Különös, hogy GAUSS leveleiben milyen sokszor említi a geometria alapjaival, illetve egy nemeuklidészi geometria lehetőségével kapcsolatos gondolatai keletkezésének időpontját. Következetesen az 1790-es évekre helyezi eszméinek eredetét. Az 1846. november 28-án SCHUMACHERhez írott tájékoztatása szerint már 1792-ben (tehát 15 éves korában!) felismerte, hogy az euklidészi geometria tagadása esetén is létezik másfajta geometria. [25, 247 old.] SZÉNÁSSY BARNA a pontosan dokumentált [114] tanulmányában joggal kérdezi, hogy vajon mennyire adhatunk hitelt a szavainak. A tudománytörténet csak azt fogadhatja el ténynek, ami megbízható adatokkal bizonyítható. Márpedig a jóval későbbi keletkezésű *levelek szűkszavú közlésein kívül egyetlen olyan adatról sem tudunk, amely alá*támasztaná GAUSS állítását. Figyelemre méltóak ezzel kapcsolatban GAUSS 1804. november 25-én BOLYAI FARKAShoz írt következő sorai [101, 81–82 old.]: „... hajdan e gordiuszi csomónak kibontását megkísértettem és mindeddig hiába próbáltam ... Van ugyan még mindig reményem, hogy ama szirtek valamikor, még az én életem vége előtt átjárást engednek ... hidd el nekem, hogy szívből örülnék, ha engem megelőznél ... Én aztán a legbensőbb örömmel megtennék mindent, hogy a te érdemed érvényesüljön és a kellő világosságba helyezkedjék." (l. még [106, 1:43]).

GAUSS hagyatékában a legterjedelmesebb nemeuklidészi geometriára vonatkozó írást az 1832. március 6-án az Appendix elolvasása után BOLYAI FARKAShoz írott levelében találjuk [101, 110–111 old.]. Legértékesebb nemeuklidészi geometriai gondolatait pedig KAGAN szerint azokban a megjegyzésekben kell keresnünk, amelyeket 1840–1846 között fűzött LOBACSEVSZKIJ „Geometrische Untersuchungen" című könyvéhez. A fent említett SCHUMACHERhez küldött levélben ezt a munkát egy igazi geométer mesterművének nevezi [106, 1:131]. (A GERLINGnek 1844. február 2-án küldött írásában ugyanakkor azért sajnálkozik, mert LOBACSEVSZKIJ műveit egy áthatolhatatlan erdőhöz lehet hasonlítani [22, 667 old.]). A könyvecske 27. cikkelyében előforduló, BOLYAI JÁNOS megállapítása szerinti „*szarvashibát*" (1.5.§) azonban GAUSS nem jelzi. BOLYAI észrevételei LOBACSEVSZKIJ vizsgálatairól úgy látszik alaposabbak, figyelmesebbek voltak.

SZÉNÁSSY végül megállapítja, hogy az euklidészi párhuzamossági axióma bizonyítását célzó sok eredménytelen kísérlet hatására 1816-tól GAUSSban egyre megérlelődik a nemeuklidészi geometria lehetőségének a gondolata. A hiperbolikus geometria körébe tartozó, ezután papírra vetett eredményei erősen támaszkodnak J. H. LAMBERT (1728–1777) vizsgálataira és a „képzetes sugarú gömb" hipotézisére. A hiperbolikus geometriát azonban nem dolgozta ki tervszerűen, a matematikai szigor által megkívánt módszerességgel. Ilyen módon a nemeuklidészi geometriák történetében nem illeti meg ugyanaz a hely, mint BOLYAI JÁNOSt vagy LOBACSEVSZKIJt [114]. VEKERDI LÁSZLÓ szavaival: „Gauss csak a paralelák mentén, csak a kidolgozás küszöbéig jutott". [9, 37 old.]. Világosan látta ezt BOLYAI JÁNOS is. A lembergi folyamodvány-tervezetben így ír: „*Úgy látszik, hogy talán* GAUSS *az egyetlen, aki néhány lépést tett a cél felé, de még mindig messze volt attól, hogy mindezt teljes egészében lássa. Fáradozásai dacára sem tudott valami nagyon előrehaladni. Ezt az alulírott igazolni tudja az apjának* GAUSS *által írt részint mostani, részint régebbi levelei alapján*" [106, 1:232].

Különös, hogy GAUSS, miután elolvasta LOBACSEVSZKIJ német nyelvű munkáját, említést sem tett az orosz matematikusnak arról, hogy egy korábbi mű hasonló vizsgálatokról és eredményekről ad számot. Viszont BOLYAI FARKAS figyelmét ő hívta fel a Geometrische Untersuchungenre. BOLYAI és LOBACSEVSZKIJ munkáiról írva elismeri, hogy saját több évtizedes hasonló tárgyú „meditációi"-ban nem érte el egyik matematikus művének gazdag tartalmát és kiforrottságát sem. Mégsem tett többet e két munka, különösen az Appendix elismertetése érdekében, mint hogy néhány matematikusnak figyelmébe ajánlotta. GAUSSnak lett volna lehetősége arra, hogy a magyar és orosz matematikust megismertesse egymással. Sajnos a tudomány nagy kárára ezt elmulasztotta.

BOLYAI JÁNOS Appendixének több zseniális meglátása közül az (1.4.§)-ban kiemeltük a körnégyszögesítéssel és a modellmódszerrel kapcsolatos észrevételeit. Érdekes, hogy ezekhez a nagy jelentőségű felfedezésekhez GAUSS egy szó megjegyzést vagy magyarázatot sem fűz. A nagy GAUSS „átsiklott" volna az Appendix néhány fejezetén? Felvetődik a sokak számára bizonyára meghökkentő kérdés: vajon tisztában volt GAUSS a teljes Appendixszel? Nem lehet őszinte akkor, amikor azt írja BOLYAI FARKASnak: „... a mű egész tartalma, az út, amelyet fiad követ, és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30–35 év óta folytatott meditációimmal", hisz GAUSS az abszolút geometriára sohasem gondolt. Leveleiben erre vonatkozó utalással nem találkozunk. Milyen igaza van VEKERDI LÁSZLÓnak, amikor ezt írja GAUSSról: „... láthatóan ő sem értette meg BOLYAI új eszméinek jelentését és jelentőségét, különben hogyan is hihette volna, hogy a lángeszű fiatal matematikus ugyanazt fedezte fel, mint ő?" [124, 67 old.]. De LOBACSEVSZKIJ dolgozataiban sincs szó az abszolút geometriáról.

Az abszolút geometria felfedezése egyedül BOLYAI JÁNOS érdeme. Előtte sem, de *vele egy időben sem gondolt senki annak megalkotására. Idézzük ismét* VEKERDI LÁSZLÓt: „BOLYAI JÁNOS nem a nemeuklidészi geometriát fedezte fel. Neki a nemeuklidészi geometria ingyen ajándékként adódott, miután fölfedezte, szó szerint megteremtette az abszolút geometriát, azt a Harmadikat, ahonnét a Másik kettő kibontotta a maga külön és önmagában megtámadhatatlan igazságát" [123, 302–303 old.].

Végül említsük meg, hogy függetlenül a felfedezés elsőbbségének kérdésétől, a nemeuklidészi geometriát csak jóval később fogadta el a tudományos világ, s így hatása is a matematika fejlődésére csak több évtizeddel mindhárom matematikus halála után kezdett nyilvánvalóvá válni.

2

A Bolyai-ládák

2.1. A kéziratos hagyaték sorsa

BOLYAI JÁNOS, a 31 éves korában nyugalmazott császári királyi kapitány első nagy csalódása miatt kiábrándultan, megtörten és betegen érkezett haza apjához 1833 nyarán, hogy életének utolsó 27 esztendejét gyermekkori álmodozásainak, tervezgetéseinek színhelyén, Marosvásárhelyen és Domáldon töltse el.

Ezekről az évekről *nemrég még ezt írta egyik „méltatója": életének második* fele haszontalanul, kényelmetlenül, anyagi gondok között vergődve telt el. Halálakor nagyszámú kéziratot hagyott hátra, amelyeket nem lehetett értékesíteni.

Valószínű, hogy ezeket a mondatokat a tájékozatlanság szülte, de tény, hogy BOLYAI JÁNOSnak, miután katonai pályafutását befejezte, valóban mostoha életsors jutott. Napjait átszövi a megnemértés, a betegség és a szegénység. De nem élt haszontalanul, hiába. Kényszerű nyugdíjaztatása után is sokat dolgozott. Elkészítette ugyan nagy munkáját, de „tüzes, gyors" szíve s elméje tovább forrt, nem engedte nyugodni. Napestig ül ezekben az években íróasztala mellett, hogy fóliáns nagyságú papírjait vagy sokszor apró papírszeletkéit teleírja a gondolatait megörökítő betűkkel. Sok ezer oldalnyi kéziratot hagy örökül.

Amikor a hűséges gondozó, SZŐTS JÚLIA remegő kézzel leírta, hogy „. . . így már nints mit tagadni, a Kapitány Úr nints többé . . . ", a marosvásárhelyi katonai várparancsnok BOLYAI JÁNOS minden írását lefoglaltatta, utasítást adott, hogy rakják azokat ládákba és vigyék be a várba. Meg kellett vizsgálni, hogy nincs-e bennük valamilyen katonai vonatkozású titok. Nem lehetett könnyű dolga annak a tisztnek, aki a nagy halom iratot átböngészte. Különös, de talán éppen ennek az önkényes intézkedésnek köszönhető, hogy a kéziratok nem semmisültek meg.

A ládák a későbbiek folyamán sok viszontagságon mentek át. Miután a vásárhelyi várban folyó vizsgálat nem talált katonai titkokat a sűrűn teleírt lapokban, átszállították azokat a városi rendőrségre, egy fészerbe. Végül az ősi iskola, a marosvásárhelyi Református Kollégium saját épületébe vitette a kéziratokat s ezzel megmentette az utókornak.

A hagyaték s a BOLYAI-geometria történetének is egyik legjelentősebb dátuma 1867, amikor az Appendix megjelent francia nyelven G. J. HOÜEL bordeaux-i egyetemi tanár fordításában [15]. Mintegy másfél évtizeden át HOÜEL volt a Bolyai-ügy legfáradhatatlanabb harcosa. Ő pedig érdeklődő kérdéseire SCHMIDT FERENCben talált rendkívül lelkes segítőtársat. SCHMIDT éppen HOÜEL kérésére írta meg a két BOLYAI életrajzát és közölte a Grunert-féle Archivban [100]. Ez az értekezés ismertette először világnyelven a két BOLYAI életrajzi adatait. Az Appendix francia fordítása a SCHMIDT által írott életrajzzal egybefűzve jelent meg 1867-ben [115].

A bordeaux-i kiadvány hatására itthon is felismerték a Bolyai-ügy jelentőségét. HUNYADY JENŐ az Akadémia egyik ülésén tájékoztatta a tagokat arról, hogy megjelent francia nyelven az Appendix és annak bevezetéseként a SCHMIDT FERENC (1827–1901) által írott életrajz. Azt indítványozta, hogy az Akadémia kérje kölcsön Marosvásárhelyről feldolgozás céljából a Bolyai-hagyatékot. Az Akadémia akkori főtitkára, ARANY JÁNOS 1868. június 15-én írt levelében kéri a Kollégium Igazgatóságától az iratokat átvizsgálásra.

A hagyaték végül is 1869 decemberében érkezett Pestre és felbontatlanul „letétetett" az Akadémia Levéltárába. Eleinte úgy tűnt, hogy a magyar matematikusok megfeledkeztek a ládákról. Két külföldi tudós, B. BONCAMPAGNI (1821–1894) és HOÜEL sürgetésére aztán az Akadémia 1871. október 16-i határozata értelmében megalakult a Bolyai-kéziratok átvizsgálására hivatott négytagú bizottság, amely azonnal megkezdte a munkát. A kézírásos hagyaték földolgozása vontatottan haladt. Az Akadémia 1874. március 16-i ülése jegyzőkönyve szerint „BOLYAI munkájának elkészülte bizonytalan, miután ez oly természetű, hogy rögtönözni nem lehet és sokszor tetemes anyag feldolgozása után sincs közölhető eredmény" [45, 14 old.].

A Bolyai-kéziratok átvizsgálása tehát nem vezetett konkrét eredményre és felhasználatlan maradt egészen 1894-ig. Ekkor érkezett meg ugyanis az Akadémiához a marosvásárhelyi ev. ref. kollégium igazgatóságának a Bolyai-hagyatékot visszakérő, és az átvizsgálás eredményéről tájékoztatást váró levele. A III. osztály határozata az alábbi volt:

„A szintén már hosszabb idő előtt beadott jelentések (KŐNIG GYULA és SCHMIDT FERENC részéről) értelmében ezen iratokban kiadásra alkalmas anyag

nem találtatván, az osztály részéről nem forog fenn nehézség azíránt, hogy ezen *iratok jogos birtokosuknak visszaadassanak*" [45, *14 old.*].

Ma tudjuk, hogy a jelentéseket nem előzte meg alapos kutatómunka. Már a rákövetkező évtizedekben P. STÄCKEL több dolgozatban és nevezetes monográfiájában megmutatta, hogy „ezen iratokban" van kiadásra alkalmas anyag. Most pedig egy évszázaddal később úgy érezzük, hogy könyvünkben is rácáfolunk az MTA III. (Math. és Term. tud.) osztályának 1894. évi határozatára.

Az iratok 1894-ben hiánytalanul visszakerültek eredeti tulajdonosukhoz. Ma ezeket a marosvásárhelyi Teleki–Bolyai Könyvtár őrzi [18]. A Magyar Tudományos Akadémia a maga Bolyai-gyűjteményét [12] a későbbi években alakította ki.

Az elkövetkező esztendőkben aztán fokozatosan lendült előre a Bolyai-kutatás. *Ha nem is tartozik szorosan a kéziratok feldolgozásához, de említsük* meg, hogy évtizedekig húzódó, lassú előkészítés után végül 1897-ben KŐNIG GYULA bemutathatta az Akadémia egyik ülésén a Tentamen második kiadásának első kötetét. A második kötet nagysoká, 1904 végén jelent meg.

A magyar tudomány BOLYAI JÁNOSsal szemben csak 100 éve, 1897-ben törlesztette régi adósságát. Ismét a lelkes SCHMIDT FERENC volt az, aki a nyomdai munka anyagi terhét is vállalva megjelenteti az Appendix-et magyarul (amikor már van francia [15], olasz, angol [13], sőt japán kiadása is; Tokióban az angol nyelvű [13] fordítást jelentették meg 1894-ben). Ugyancsak ő szorgalmazta a BOLYAI FARKAS és GAUSS közötti levelezésnek a kiadását. Évtizedekre terjedő fáradozását 1899-ben siker koronázta: a levelezést tartalmazó szép kötet egyidejűleg két helyen (Budapesten és Lipcsében) is megjelent [101]. A kiadványt egy fiatal matematikussal, PAUL STÄCKEL-lel készíttették elő.

PAUL STÄCKEL német egyetemi tanár áldozatos munkájának köszönhető, hogy BOLYAI JÁNOS kéziratban maradt matematikai eredményei nagy része a századforduló idején napvilágra került. STÄCKEL Marosvásárhelyre is ellátogatott, hogy minél alaposabban tanulmányozhassa a BOLYAIak munkáját. Kutatásainak eredményeit az értekezések egész sorában tette közzé. Kétkötetes könyve [106] ma is az az alapmű, amely a két BOLYAI életének és tevékenységének legteljesebb képét adja. A STÄCKEL-könyv ma már nyilvánvalóan sok helyen kiegészíthető az újabb vizsgálatok eredményeivel. Munkánk következő részében éppen ez a célunk. Szándékunk a STÄCKEL-mű, de más BOLYAI-monográfiák által hangoztatott pontatlanságokat és tévedéseket átértékelni és helyreigazítani.

STÄCKEL komoly érdemeket szerzett a BOLYAI-ügyben. De a STÄCKEL-mű létrejöttében a hazai magyar matematikusok is szerepet vállaltak. A magyar nyelvű szövegeket SCHMIDT FERENC, FEJÉR LIPÓT és mások ültették át németre, a

könyv végén található hetvenoldalas „Jegyzetek" anyagát főleg RÉTHY MÓR, KÜRSCHÁK JÓZSEF és SCHMIDT FERENC szolgáltatta [115].

2.2. Bolyai János följegyzései

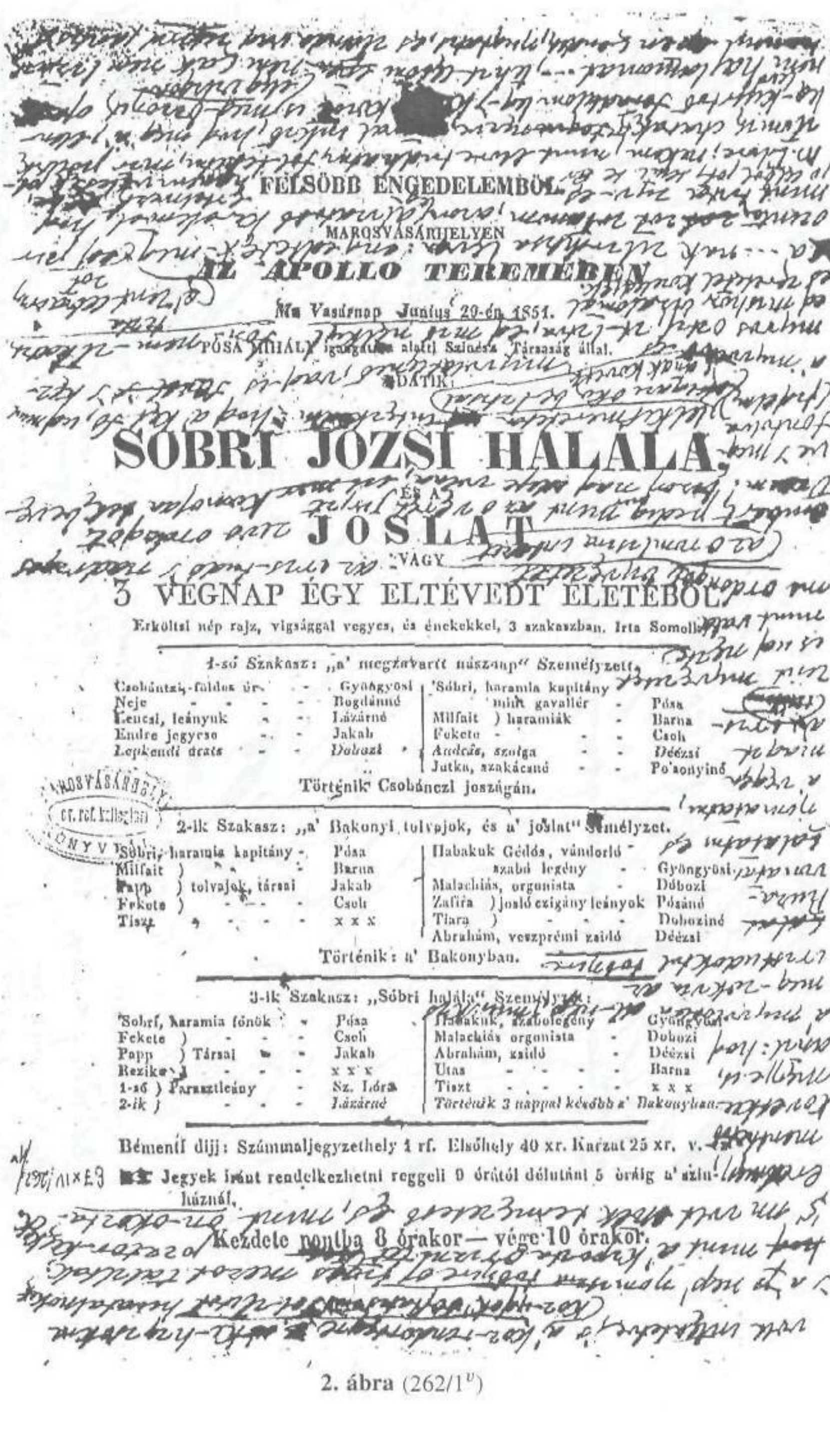
Nem könnyű a Bolyai-kéziratokat olvasni, bár a már sárguló papírlapok tanulmányozása minden türelmes Bolyai-kutatónak igazi élményt, sok örömet szerezhet. Ugyanakkor jogos egyes szerzők panasza a kéziratok kibetűzésének nehézségei miatt. BOLYAI JÁNOS följegyzései nem nyomtatásra kész dolgozatok, hanem befejezetlen tervezetek számos hézaggal, ismétléssel, törléssel, betoldásokkal. BOLYAI írásaiban maga szerkesztette betűket használ, sokszor elég nehézkes és szokatlan szimbolikájával kell megbirkóznunk. Új szavakat alkot. Nehéz stílusa könnyen kedvét szegi a kevéssé szívós kutatónak. Mindezek rendkívül megnehezítik és fárasztóvá teszik matematikai és más természetű följegyzéseinek a számbavételét. Maga is beismeri, hogy gyakran sok gyötrődéssel jár gondolatainak formába öntése. Találóan írja SZÉKELY JÁNOS „Bolyai hagyatéka" című szonettkoszorújában:

> „Százszor betoldta, százszor húzta át,
> Míg izzadozván meglelte az utat."

BOLYAI JÁNOS följegyzéseit írva nem gondolt arra, hogy azok *„tökélyesek"* legyenek, hiszen a maga számára írt, nem a nyilvánosságnak szánta azokat. A legszívesebben nagyméretű szürkés vagy kékes színű fóliánsokra írt. Úgy tűnik, ezeket nem tudta mindig megvásárolni s ha nem akadt más, minden keze ügyébe került papírt felhasznált, hogy gondolatait lejegyezze: szétterített régi levélborítékok, hivatalos okmányok, gyászjelentések, hirdetések, meghívók üresen maradt széleit vagy hátlapjait. Hagyatékában rengeteg dirib-darab papírra írt megnyírbált följegyzést találunk. Így vall erről – MANDICS GYÖRGY szavaival - BOLYAI JÁNOS:

> „......................... Apró
> papírszeletkék fuvarozzák a keservesen
> kigyöngyözött eszmét. Most már csak a nyelv
> szép formáját kell megtaláljam..."

Sokszor nagy gondot okoz az iratok időrendűségének a megállapítása. BOLYAI csak nagyon ritkán jelöli meg valamelyik írása keletkezésének időpontját. Még leveleit sem látta el mindig keltezéssel. Külön öröm a kutatónak, amikor



FELSÖBB ENGEDELEMBŐL

MAROSVÁSÁRHELYEN

AZ APOLLO TEREMÉBEN

Ma Vasárnap Junius 29-én 1851.

PÓSA MIHÁLY igazgatása alatti Színész Társaság által.

ADATIK:

SÓBRI JÓZSI HALÁLA,

ÉS A

JÓSLAT

VAGY

3 VÉGNAP EGY ELTÉVEDT ÉLETÉBŐL.

Erkölcsi nép rajz, vigsággal vegyes, és énekekkel, 3 szakaszban. Irta Somoll...

1-ső Szakasz: „a' megzavart nászanap" Személyzet.

Csobánczi-földes úr	Gyöngyösi	Sóbri, haramia kapitány mint gavallér	Pósa
Neje	Bogdánné	Milfait) haramiák	Barna
Lencsi, leányuk	Lázárné	Fekete	Csoh
Endre jegyzo	Jakab	András, szolga	Déézsi
Lepkendi deák	Dobozi	Jutka, szakácsné	Po'sonyiné

Történik Csobánczi jószágán.

2-ik Szakasz: „a' Bakonyi tolvajok, és a' jóslat" Személyzet.

Sóbri, haramia kapitány	Pósa	Habakuk Gédós, vándorló szabó legény	Gyöngyösi
Milfait)	Barna	Malachiás, orgonista	Dobozi
Papp) tolvajok, társai	Jakab	Zafira) jósló czigány leányok	Pósáné
Fekete)	Csoh	Tiara)	Dobozinė
Tiszt	x x x	Abrahám, veszprémi zsidó	Déézsi

Történik: a' Bakonyban.

3-ik Szakasz: „Sóbri halála" Személyzet:

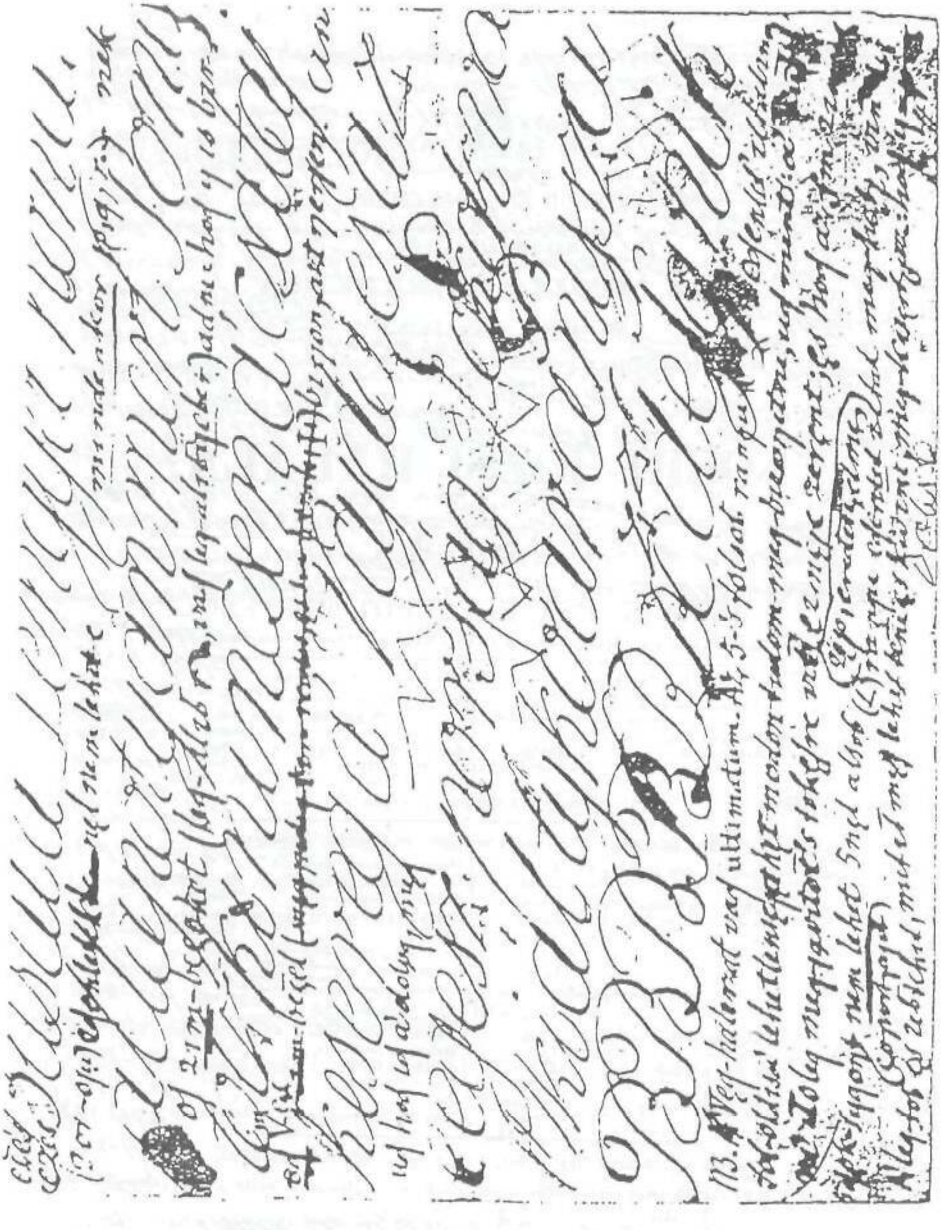
Sobri, haramia főnök	Pósa	Habakuk, szabólegény	Gyöngyösi
Fekete)	Csoh	Malachiás orgonista	Dobozi
Papp) Társai	Jakab	Abrahám, zsidó	Déézsi
Rezike)	x x x	Utas	Barna
1-ső) Parasztleány	Sz. Lóra	Tiszt	x x x
2-ik)	Lázárné	Történik 3 nappal később a' Bakonyban.	

Bémeneti díjj: Számmaljegyzethely 1 rf. Elsőhely 40 xr. Karzat 25 xr. v.

Jegyek iránt rendelkezhetni reggeli 9 órától délutáni 5 óráig a' szinházánál.

Kezdete pontba 8 órakor — vége 10 órakor.

2. ábra (262/1v)



3. ábra (1293/1v)

egy kalendárium, sorsjegy hátán vagy iskolai értesítőn talál jegyzeteket, mert ezeken keltezés is olvasható s így ha nem is teljesen megbízhatóan, de eligazodhat az írás keletkezésének időpontjára vonatkozóan. Sok színházi műsorlap hátoldalát teleírta BOLYAI. Ezek alapján egy hozzáértő szakember már-már megírhatná a múlt századi Marosvásárhely színháztörténetét. Mindenesetre sok értékes adalékot szolgáltatnak a marosvásárhelyi színházi élet eseményeinek számbavételéhez (**2. ábra**). Felhasználta a Tentamen nyomtatott lapjait, saját régebbi jegyzeteit (ezek közül több szinte palimpszeszt-szerű {olyan pergamen, amelyről az eredeti írást eltávolították, s helyébe újat írtak}) s nem lehet meghatódás nélkül kézbe venni fia, BOLYAI DÉNES és leánya, BOLYAI AMÁLIA (Máli) megvonalkázott írásgyakorlatára odavetett sorait (**3. ábra**).

2.3. Miért jegyzetelt Bolyai János?

BOLYAI JÁNOSnak Marosvásárhelyen a Teleki–Bolyai Könyvtárban mintegy 14000 oldalnyi (ebből 1000 oldal diákkori jegyzet) kéziratát őrzik. A kéziratokat nagy dossziékban találjuk, megszámozva, leltározva. Ebben a formában való elrendezésüket ABAFÁY GUSZTÁV és BENKŐ SAMU végezte el 1953 és 1959 között. BENKŐ SAMU az, aki STÄCKEL után a legalaposabban áttanulmányozta BOLYAI JÁNOS hagyatékának nem matematikai tárgyú kéziratait. A hosszú évek *munkájának eredménye – több részlettanulmány mellett –* BOLYAI JÁNOS *vallomásai* című könyve [6], majd az Apa és fia tanulmánykötet [8]. Írásainak nyomán a tépelődő, küzdő, elmélkedő ember bontakozik ki előttünk. Könyveiben azt bizonyítja, hogy a kéziratban maradt Üdvtanban ugyanaz a nagy összefüggések felismerésére zseniális elme munkál, mint az Appendixben, csupán meglátásai nem korlátozódnak szakterületére, hanem kiterjednek az élet és a társadalom általános vonatkozásaira is.

BENKŐ SAMU a marosvásárhelyi kéziratok szétszóródott papírhalmazának rendberakása és elemzése alapján emberként állítja elénk a nagy matematikust. BENKŐ úgy véli: „A magános ember vallomásai ezek. Előre eltervezett rend nélkül keletkezett írások; papírra vetésükkel az egyedüllét börtönéből keresett szabadulást és kapcsolatot a világgal az onnan kiszorult rendkívüli termékenységű elme … Ő – leszámítva apjához intézett leveleit – nem oszthatta meg senkivel gondolatait, tudományos, elméleti gondjait. Így lett egyetlen bizalmasa, meghallgatója a türelmes papír" ([6], 10 old.).

A följegyzések nagy részén valóban meglátszik, hogy azokat a magány szülte, saját magának írta BOLYAI JÁNOS. Azt azonban nem állíthatjuk, hogy ennyivel

megelégedett volna. Ezek csupán még nem kellően csiszolt, ideiglenesen lejegyzett gondolatok. Biztosan nem akarta, hogy nyom nélkül vesszen el az összehalmozott sok betű, vonal, képlet, gondolat. Bizony, szerette volna azokat megosztani a nagy nyilvánossággal. Olvassuk csak az alábbi sorokat: „... *bár is én itt semmit se járok correct conceptus (rendszerező összefoglalás után, nyakra főre sietve) a legderekabb és, a tanban, hatalmasabb eszmék, csak az elfeledés elleni hirtelen papírra vetésre is idő kell, úgy, hogy alig győzöm ezt még mind eddig is. Azonban közelít azon határidő, mikor már elérve a kitűzött célt, a meglévő anyagot kezdem kireszelve, simítva, fényesítve (mi utóbbi azonban nem a szemnek, csak a tanban jó) egy szóval kiművelve, tökélyesítve tisztára és kitelhető jól és kellemesen olvashatólag írni*" (800/1^{v}). Egy másik helyen: „*Tanom lényegét három nyelven, magyarul, németül és latinul szándoklom kiadni*" (743/3). Vagy az algebrai egyenletek megoldhatóságát vizsgálva: „... *egyenletek geber föloldási módja ... hatalmamban lévén, melyeket is ha a jelen vizsga jól vagy kedvezőleg fogadtatik: közölni szándoklok*" (710/1). BOLYAI nem fél a bírálattól sem. Ha a munkája megjelenik, az olvasót így szólítja meg: „*Máson lévén a sor szigorán vizsgálni, s ha szükségesnek vagy helyesnek találja az illedelem határai között kíméletlenül és minden keménységgel és szigorral cáfolni: mire a Tisztelt Olvasót is illendőleg megkérem*" (710/2). Biztosan közlésre szánt szöveg az is, amelynek egyik mondata így hangzik: „*Azért ideje már e kis ártatlan csinnek véget vetni s a Tisztelt Olvasót fölvilágosítani, többé zavarban nem hagyni*" (868/1). Egy kis cédulán (996/1) így kezdi az egyelőre még nem létező kiadónak szánt utasításait: „*Jelen kéziratom Kiadó-s Kinyomója figyeltetik arra, hogy az ebben vörös íron – vagy plajbásszal írott, tehát a jelen jegyzet is, mint csak a Kiadó számára való, nem kinyomandó*". Íme egy – német szövegben eldugott – mondat: „*Egyszer mindent a Világ stilja szerint, a mellett saját Appendixi s még több rövidségű tökéletesebb stilomon kiadni*" (1177/5). Egy helyen még azt is megjegyzi, hogy munkáit almazöld papíron szeretné megjelentetni. Csak sajnálhatjuk, hogy erre sohasem került sor.

Többször éri BOLYAI JÁNOSt az a „vád", hogy miért hallgatott el az Appendix megjelenése után. Miért nem hozta nyilvánosságra későbbi fölfedezéseit? Egyik oka ennek – SZÉNÁSSY BARNA szerint – az Appendix közönyös fogadtatása, a várt siker elmaradása és emiatt bekövetkezett kedveszegettség. De anyagi okok is szerepet játszhattak, hisz mind az apa, mind a fiú saját költségén adta ki írásait, tudományos elszigeteltségükben nem találtak erre más lehetőséget. A kiadáshoz szükséges anyagi terheket pedig BOLYAI JÁNOS szerény nyugdíjából nem vállalhatta.

A fentiek szerint az első magyarázatot kiigazíthatjuk. Az Appendix sikertelensége nem törte össze teljesen BOLYAI JÁNOSt. Művének kiadása után sem

maradt tétlen. Egy pillanatig sem kételkedett munkája értékében és bízott az idő utólagos jóvátételében. 1844-ből származó saját vallomása szerint BOLYAI JÁNOS leginkább azért várt a publikálással, mert írásait nem sikerült még az általa megkívánt tökéletes formába öntenie. Így ír erről: „... *azon rengetegnek, mely már szándékozok a köz-jóra világ elébe adni, némi jeléűl annak, hogy koránt sem aludtam el életemet, s nem vagyok azon meg-vettetésre méltó, millyel némelyek hát megett illetnek. Csak az a fatális körülmény szúr, fúr most is, mi tanaim kiadásától eddig is mind el-tartott, hogy a tan míg TÖKÉLYES rendben, idomban nincs, vagyis míg kijelelése is nem tökélyes. Bármily tökélyesen tudja is az ember maga mind értésre, mind kijelelésre nézve, de ha az olvasót is meg nem barátkoztatta még a helyes nyelvvel, oly mint mikor egy darázsfészekbe nyúl az ember*" (445/1^{v}).

Szándékában volt, hogy írásaival fölkeresi az általa ismert két matematikai folyóiratot is, a Crelle's Journal-t és a Grunert Archiv-ot. Papírjai között fönnmaradt két olyan lap, amelyeken azonnali feladatait jegyezte fel Teendők vagy igazitandóim 1851. nov 24-e óta, (474/1) és Teendőim 1856. augusztus 1-től kezdve (459/1) címen. A „*naponként reggel átnézendő*" tennivalók között miután felsorolja a háztartásához télire szükséges holmikat (szekér fa, 25 jó gyertya, paprádi(?) kötet papír, törökbúza, aszú gyümölcs, véka dió stb.), megjegyzi, hogy vissza kell kérnie apjától a leveleit. Legfontosabbnak tanai „rendbe s tisztába *írását*" tartja amelyeket magyarul Budapestre (a Tudós Társulathoz), németül és latinul Bécsbe („*a cs. k. tanos akadémiához*") akar küldeni. (Hasonló tervekről már 1844-ben írt egyik levelében is olvashattunk az 1.2. paragrafusban is.) De Göttingába, Berlinbe („*ott a Crelle-hez és Grunert-hez*") Párizsba, Rómába is szándékában van – jegyzete szerint – ezeket elküldeni. Legfőbb művéről ezt írja: „... *s az Appendixnek mint öntalálmányomnak megvédése vagy tiszta magos fénybe helyezésére ama német archivum vagy tudományos gyűjteménybe fölküldetni s mindeniket illő célszerüleg el-szétosztani a Földön*".

A kézirat egyik mondata azt jelzi, hogy BOLYAI JÁNOS gondolatai között 1851-ben még egy, az Akadémiára benyújtandó pályázat lehetősége is felmerült: „*A bécsi s magyar akadémia jutalom kérdéseit s jutalom díjait megtudni s ha célszerűnek s lehetőnek találom azokra megfelelni, eleget tenni...*" (474/1).

A „*Montucla által méltán dicsért*" (741/1) L. MASCHERONI (1750–1800) könyvének hatását érezzük a „teendők" következő mondatán: „*egy cirkalom nyílássali föloldását az egész* EUKLID *első könyvébeni föladatoknak*". Saját magától kérdezi, hogy vajon melyik az az egyenlete LEIBNIZnek, amelyet NEWTON nem, de talán BERNOULLI JÁNOS megoldott?

Még egy érdekes mondatfoszlány húzódik meg a sorok között: „*egyelőre őrnagyi rang s állodalmi tanácsnok*". Vajon mire gondolt BOLYAI, amikor ezeket a szavakat papírra vetette?

2.4. Utinam Gauss superstes esset!

Fájdalom, BOLYAI JÁNOS tipikus példája a szerencsétlen sorsú tudósnak. Éveit keserű csalódások kísérték. Még kamasz, amikor csalódnia kellett eszményképében, GAUSSban, amiért apja legmeghittebbnek vélt barátja nem fogadta őt házába. Miután zseniális geometriája nem kapta meg a kellő elismerést, öt év múlva egy újabb rendkívüli mű megírására vállakozott, de a pályabírák a Responsiót sem értették meg, ő megint csak a csalódással maradt. Még városa is, a legjobb esetben közönnyel szemléli vívódásait. Tragédiának nevezhetjük életét, mert nagyszerű felfedezéseit a maradi társadalom képtelen volt befogadni. A Tentamen egyik példánya az Appendixszel együtt a Magyar Tudományos Akadémia polcain porosodott, de életében BOLYAI JÁNOSnak még a neve sem hagzott el ennek falai között. A Tentamen köteteit BOLYAI FARKAS küldte el a Magyar Tudós Társaság címére mindjárt a megjelenésük után. Az I. kötetet 1833 augusztusában küldte meg, a II. kötet ajándékozását 1835. május 1-jén jelenti a főtitkár [45, 110]. Ezek a példányok ma is megtalálhatóak a MTA Könyvtárában ([12] az 542.012 könyvtári jelzet alatt). Mindkét kötetben az előzéklapon autográf írással ez olvasható: „A m.t. társaságnak BOLYAI FARKAS mint szerző".

DÖBRENTEI GÁBOR titoknok, akihez a küldemények érkeztek, még augusztus 29-én válaszolt BOLYAI FARKASnak: „Könyvedet tehát nevedben a Társaságnak október 1-ső napján adom majd bé...". Figyelemre méltóak a levél következő mondatai: „Rád nézve is egyenesen írtam midőn kívántam, hogy mathesisi munkádat magyarul írd, mivel 3^d vidéki rendes tagnak óhajtottalak majd 300 pengő forinttal, ami mellett már ezután deák munkád miatt nem szólhatok; fijadra a Kapitányra nézve is az a barátságos észrevételem van, hogy ha magyarul adja ki munkáját lehet még helybeli tag itt 500 pengő forinttal, mely summa penziójához egykor jól járulna; lehet vidéki rendes tag 300 pengő forinttal".

DÖBRENTEI úgy vélte, hogy a latin nyelvű Tentamen miatt nem vetheti fel a Tudós Társaságban BOLYAI FARKAS rendes tagságának ajánlását. 1835 szeptemberétől már nem DÖBRENTEI volt a Társaság titoknoka. Utóda nyilván nem ismerte közelebbről BOLYAI FARKASt. A körülmények kedvezőtlen alakulása folytán többé nem került sor a rendes tagsági ügyre [45, 7-8 old.].

Sajnos a reformkori Akadémia nem kis mértékben hibás, hogy Magyarországon a természettudományok terén nem alakulhatott ki olyan szellemi klíma,

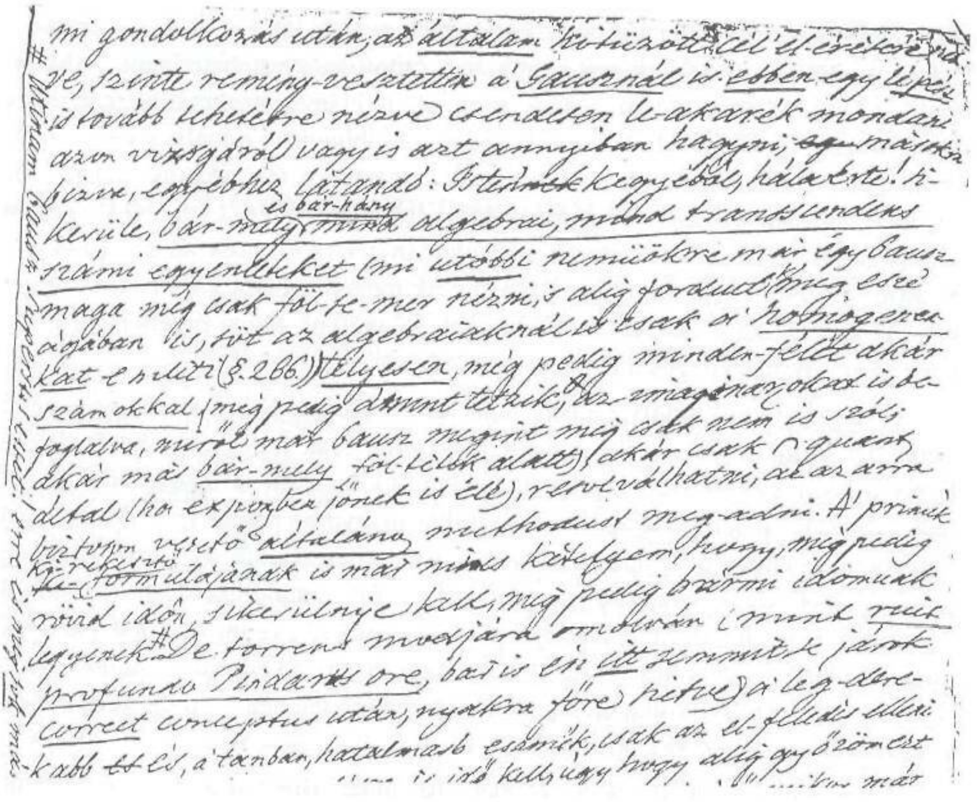
mely alkalmas lett volna korszerű gondolatok befogadására. Az igazi tragédia – írja VEKERDI LÁSZLÓ – a matematikában zajlott le, jóvátehetetlenül. A Matematikai Osztály tagjai hatalmas buzgalommal, de hiányos szakmai hozzáértéssel láttak hozzá tisztüknek. Ítéleteik felületesek, s többnyire személyes kapcsolataik által irányítottak. Ez volt az oka annak, hogy tudós társaságunk eléggé szégyenletesen bánt a két BOLYAI munkáival. Így például VÁLLAS ANTAL a honi matematikai irodalom áttekintésében (Tudománytár 1836) hosszan dicséri NAGY KÁROLY aritmetikáját, de felsorolásában csak megemlíti BOLYAI FARKAS remekét, Az artimetika elejét, sőt a Tentament is, anélkül, hogy egyetlen elismerő vagy akárcsak tárgyilagosan ismertető szót is vesztegetne rájuk.

A Matematikai Osztály rendes tagjai az Akadémia Könyvtárában meglévő Tentamen-példányt (s annak „Függelékét") még csak meg sem nézték. Pedig BOLYAI FARKAS főművének magyar nyelvű átdolgozását is felajánlotta: „hogy diák halottja valaha salakjából megtisztulva magyarul támad fel". Valósággal megdöbbentő, hogy a Tentamen mennyire ismeretlen maradt. A Tudós Társaság például 1844-ben a paralelák problémáját javasolta jutalomkérdésnek, holott a Tentamen és benne az Appendix egy példánya már 12 éve ott feküdt a Társaság könyvtárában [1, 29 old.]. Nem kell túlságosan nagy képzelőerő ahhoz, hogy belássuk, mit tehetett volna az Akadémia, ha még idejében s itthon kellő helyre kerülhetett volna BOLYAI JÁNOS fölfedezése [124, 63-66 old.].

Mégis mennyi elismerés jutott élete folyamán BOLYAI JÁNOSNAK? Talán GAUSS kétes értékű mondatai közül a következő: „Nagyon meglepett ... és nagyon örvendek, hogy éppen régi barátom fia az, aki engem ilyen csodálatos módon megelőzött" [101, 112-113 old.]. A levél többi sorai, sajnos, erősen tompítják ezeket a szavakat.

Számos írásából úgy érezzük, hogy nem vágyódott a külső dicsőségre. „... *nem vágytam* – írja önéletrajzában – *az afféle, mások által vadásztatni szokott, külső halhatatlanságra...*" (1086). Inkább megértésre, mint dicsőségre áhítozott. A tudósnak az a fizetsége, ha fáradságos munkájával megtalálja az igazságot. Azzal vigasztalta magát, hogy a *feltalálás öröme vetekszik mindenféle elismerés dicsőségével*. Ugyanakkor minden sorából kiérződik, hogy ennek a beteg, magányosságában megkeseredett embernek szigorú homlokráncai ugyancsak kisimulnának az elismerés akármilyen parányi sugarától is [6, 42 old.].

Amikor abban reménykedik, hogy sikerül megtalálnia a prímszámok képletét, apjának írt egyik levelének oldaljegyzetében így kiált fel: „*Utinam* GAUSS *superstes esset!*" {Bárcsak GAUSS még élne!}. *Erre és még sok más hasonlók eléggé legtekintélyesebb méltányolhatására nézve is*" ($800/1^{v}$) (**4. ábra**). Lehet-e közömbösen olvasni BOLYAI JÁNOS kívánságát? Ki ne érezné ebből a néhány



4. ábra (800/1^v)

szavas széljegyzetből BOLYAI titkos vágyát, hogy bárcsak GAUSS is tudomást szerezne az ő fontos felfedezéséről? Végül is mennyire sóvárgott az elismerésért. S ezt egész életében leginkább GAUSStól várta.

„BOLYAI JÁNOSt nem az elismerés kimaradása – írja SARLÓSKA ERNŐ –, hanem a reátörő gondolatok árja sodorja ki társadalmából. Nem a barikádokon kell keresni hozzá a mindent megmagyarázó tettet. A tizenkilencedik század nagy magányosai szolgáltatják a kulcsot sorsához, azok a sóhajok, melyek keseredetten először adnak számot a kalandról, mely arra vár, ki az ideák ingoványába téved" [95].

2.5. Matematikai természetű iratok

BENKŐ SAMU, érthető módon, csak a nem matematikai természetű Bolyai-iratokat tanulmányozta. Nem lévén szakember, a matematikai problémákat tartalmazó jegyzeteket nem is rendszerezhette. „... a matematikai tárgyú irományo-

kat – olvassuk [7, 360 old.] – pusztán külső ismérvek (papír, őrszavak) alapján csoportosítottuk, illetőleg leltároztuk és matematikatörténeti iskolázottság híján szüntelenül elégedetlenkedtünk magunkkal, hogy alig hasznosíthatunk valamit a szövegek kínálta belső összefüggésekből."

Ezek az írások valóban ma is elég nagy összevisszaságban találhatóak a különböző dossziékban. Ezért sokszor egy megkezdett gondolat vagy ötlet folytatását csak nagynehezen pillanthatjuk meg, néha hetek, hónapok munkájának eredményeképpen. Ha egyáltalán létezik valahol folytatás.

Sajnos a BOLYAI JÁNOS által készített jegyzetek nem maradtak fenn hiánytalanul. Sok elkallódott közülük. Tudomásunk van arról, hogy annak idején az egyik kollégiumi tanár, SZABÓ SÁMUEL, azért, hogy az iratokat kényelmesebben tanulmányozhassa, többet hazavitt közülük. A nála felejtődött lapokat fia csak jóval apja halála után találta meg. Vajon akkor hiánytalanul előkerültek a papírok? Szerencsére a fiú, SZABÓ PÉTER az atyja hagyatékában talált Bolyai-kéziratokat megőrizte, feldolgozta s ezzel felbecsülhetetlen munkát végzett. Keletkezett az iratokban nagyobb kár is. BOLYAI JÁNOS féltestvére, BOLYAI GERGELY (1826–1890) sem őrizte elég gonddal a birtokában lévőket. Sajnálkozva olvassuk egyik, 1884-ben írt levelét: „... Jánosnak sok levele volt, mind megsemmisítettem. Azokban igaz, hogy roppant sok mathematicum volt..." [45]. Lehetnek egyes családok birtokában is BOLYAItól származó kéziratok. Könnyen elképzelhető, hogy a leglelkesebb Bolyai-kutató, SCHMIDT FERENC leszármazottainak birtokában is vannak még Bolyai-iratok. Nem megalapozatlan az a feltevés, miszerint STÄCKEL, mivel nem tudott huzamosabb ideig Marosvásárhelyen tartózkodni, feldolgozás céljából több kéziratot magával vitt, amelyek aztán többé nem kerültek vissza eredeti helyükre. De ez természetesen nem csak STÄCKELlel történhetett meg [9, 14 old.]. Annak idején magunk is tapasztaltuk, hogy a Teleki–Bolyai Könyvtárban őrzött kéziratok között nincs meg minden, ami PAUL STÄCKEL, illetőleg a neki (főleg magyar nyelvű szövegek fordításával) segédkező tudósok kezén megfordult – írja BENKŐ SAMU [7, 360 old.]. Valószínűleg sok kéziratos anyag tűnt el a BOLYAI FARKAS halálát követő napokban. A gyarló felügyelet lehetővé tette egy-egy kötegnek a megsemmisítését. Csak valami effélevel magyarázhatjuk, hogy János több, apjához intézett levelén kívül teljességgel hiányoznak az apa kézirati hagyatékából legbensőbb barátainak, BODOR PÁLnak, JAKAB LAJOSnak, BOD PÉTERnek a hozzá küldött levelei is. Ezeknek kötegestől kellett eltűnniök [20, 25 old.].

E könyv írója hosszasan kereste például azt a cédulát, amelyen STÄCKEL szerint [106, 1:254 és 277 old.] BOLYAI összeállította az általa megoldhatónak vélt problémákat, de minden fáradozása hiábavalónak bizonyult. Valószínűleg a végleg megsemmisült iratok közé kerültek azok a jegyzetek is, amelyeken BOLYAI JÁNOS „*tisztán, finom úton*..." ($445/3^v$) bebizonyította a klasszikus algebra alaptételét.

2.6. Milyen nyelven írt Bolyai?

BOLYAI JÁNOS a kiadásra szánt munkáit, de saját magának lejegyzett gondolatait is három nyelven írta le: magyarul, latinul és németül (természetesen gót betűket is használt). A Scientia Spatii latinul jelent meg, de ismerjük a német Raumlehre változatát is. Lehetséges, hogy 1825-ben az apjának átadott példányt magyar nyelven fogalmazta. Nem tudhatjuk. Kétségtelen viszont, hogy magyarul gondolta ki. A Responsiót és a komplex számokról készült több más dolgozatát latinul írta. LOBACSEVSZKIJ művéhez fűzött Észrevételeit magyar nyelven örökíti meg. Amint már fennebb láttuk (2.3.§), munkáit is három nyelven, magyarul, németül és latinul szerette volna kiadni (743/3).

A kéziratok jegyzetelése, másolása közben két, ezzel a kérdéskörrel kapcsolatos, igen érdekes följegyzésre találtam. Ezeken a cédulákon BOLYAI JÁNOS azt az elhatározását rögzíti, hogy a következő években anyanyelvén fog írni. „*magam pedig e tárgyban* – írja apja egyik levelére – *nagyobbára 1842 óta (mikor, addig mind németül írva) legelőbb fordítottam történetesen figyelmemet a magyarra s avval együtt a nyelvre komolyabban midőn az alapokat még fiatal koromban megvetettem...*" (1399/1). Ceruzával írt jegyzet a következő: „*... végre megláttam az Atyám 1830-ban kijött Arithmetika Elejét s abban betűinek s műszavainak javítása s nyelvünk természetével megegyező újbóli teremtése iránt tett kísérleteket: 1842 nyara óta némi apróbb tanulmányok után anyanyelvemre s annak kitűnő derék tulajdonaira közelebbről kezdettem figyelmemet s ... azóta helyesnek tanáltam magamat legelőbb magyarul leendő kiadására tanom lényegének*" (1491/1). 1846 körül a következőképpen ír: „*Én ... a magyar nemzetet s nyelvet különösön szeretem, s éppen javát kívánom eszközölni mint az is bizonyítja, hogy tanaimat magyarul írtam, s írom jelenit is*" (1086/3).

Ezután a hagyatékban valóban megszaporodnak a magyar nyelvű írások. Gondolhatnánk arra, hogy ilyenformán több irat keletkezésének időpontjára könnyebben következtethetünk. Az időrendiség kérdésében azonban ez a szempont sem nyújt teljes biztonságot, mivel elég gyakran bukkanunk német nyelvű jegyzetekre az 1842-es év után is.

BOLYAI JÁNOS több idegen nyelvet ismert és megvolt benne az igény, hogy újabbakat tanuljon meg. Így vall erről: „*N.B. ha csakugyan kivált miután egy néhány közelebbről érdekesebb nyölvvel némileg, meglehetősen ismeretes vagyok (magyar, német, latin, frank, olasz, román -), még más nyölvet akarok tanulni, egyik különösen a sinnai* {kinai} *és japáni lenne ...*" (845/8) és [6, 198 old.].

2.7. Bolyai János jelrendszere

Megnehezíti a Bolyai-hagyaték számbavételét a BOLYAI JÁNOS által sok helyen bevezetett, néhol eléggé nehézkes, új jelölés. Lehet, éppen ez a szokatlan szimbolika is egyik oka annak, hogy még mindig feldolgozatlan a hagyaték. Emellett nem szorgalmazzák ezt a munkát az olyan kishitű „biztatások" sem, amelyeket például egyik matematikusunk tollából olvashatunk: „... a Marosvásárhelyen őrzött Bolyai-hagyaték alapos átvizsgálásra, a kéziratok ismert része is újabb átolvasásra érdemes – bár túlzott reményeket táplálni nem helyes..." (MTA III. Osztály Közleményei, **3** (1953), 291 old.). BOLYAI jelöléseinek megfejtése türelmes, aprólékos munkát igényel. Néha csak nagyszámú oldal összehasonlítása után találjuk meg ezek nyitját. Könyvünkben egy teljes fejezetet szentelünk a feloldott szimbólumok ismertetésére. Most csak néhányat mutatunk be ezekből, csatolva BOLYAI magyarázatait is, amelyekkel megokolja bevezetésüknek előnyeit. Ízelítőül íme néhány példa:

„*Legyen több csín, főleg pedig a »d« betűnek állandólagi el nem foglalása s egyéb célrai máskénti használhatásáért a szokott »d« helyett »ɓ«, hogy röviden szólhassak ... differenciál jel: mi jelentvénye e jelnek a »d«-hezi sok hasonlatjánál fogva, bárki emlékébe azonnal könnyen benyomódhatik s előfordulás alkalmával magát önként feltolja.*

$ɓ_x$ y *az: mi y-nak x-re nézti diferentiálja*" (1443/3).

„*... idő, tenta s rézpor s fáradság kevesbitéséért s mocsokra kevesebb alkalom-adásért »ɗ « helyett ⊙ irok...*" (1323/1).

A nulla jól ismert és általánosan használt „O" jelét sok helyen „*száműzi*" BOLYAI, de nem teljesen.

„*... jobb lenne bár is kissé fáradságosb, kényelmetlenebb »0«-t írni »O« helyett...*" írja az 1389/3 oldalon. (1844-ben még nem használja ezt a jelet (7.2.§)) Ehhez a jelöléshez aztán bővebb megjegyzést, magyarázatot is fűz: „*De mennyit vesződtek eleink betűik tökélyesbitésével: láthatni Fogarasi Művelt magyar nyelvtanja elején, hol is például csak az »O«-t is, mint emlékszem 38(!) féleképpen írták ... a legegyszerübbet mégis el nem tanálva. Aki Fogarai lapját látja jelen tökélyes betüink minden becs fölötti magas becsét ... sokkal elevenebben érzendi*" (597/7).

A „O" „becsületét" a kongruenciák elméletében állítja helyre: „*A* GAUSS *által használt* $a \equiv b\,(\mathrm{mod}\ c)$ *helyett az »*$a \equiv b\,O\,c$*« jelölés nemcsak egyszerübb, rövidebb, könnyebb, de a betűket és zárójeleket egyetlen »0«-ba tesszük össze*" (1190/29). Írja azt is, hogy az $m\,O\,A \equiv a$ egyszerű, kiváló és ésszerű ($121/6^v$, 7^v).

Az „O"-val az Appendixben is találkozunk. Az r sugarú kör abszolút geometriai kerületét BOLYAI „Or"-rel jelöli.

A komplex számok írásánál általa igen kedvelt szimbólumokat használ. Nála a „ $\oplus b$" jelentése ib ($i=\sqrt{-1}$), „ $\ominus b$"-é pedig $-ib$. Ezek szerint BOLYAI az $a+ib$-t, illetve az $a-ib$-t így írta:

$$a \oplus b,$$

illetve

$$a \ominus b.$$

Egy az 1850-es évek derekából származó írásán így ír ezekről: *„Ezen »$\oplus$«, »$\ominus$« jegyekkel már szinte egy fertály évszázad (1831 első fele) óta nagy kényelem- és gyönyörrel élek és oly szép- vagy csinosak általában célszerű- és tökélyeseknek találom és nagyon remélem és erősen hiszem, hogy meglátva az egész math. Világ azonnal megkedvelve mohón elfogadja, hogy még a jövő életekben sem hiszem jobbak legyenek*" (800/3 és 3^v). Másutt (1348/11) így magyarázza a fenti jelek bevezetésének szükségességét: *„Legyen nem csak rövidségért, egyszerübb, könnyübb s jobb izlésért, hanem a tan metaphysikája helyesbb fölfogásáért is $\oplus$ s $\ominus$ (a becsei $\sqrt{-1}$)-nek (melyet* GAUSS *+i és $-i$-vel jegyez).*" Ezeket a szimbólumokat már megtaláljuk több, Olmützban készült jegyzeten: egy 1830. március 10-én keltezett okmányon (1526/1), aztán az 1833. nov 14-én készült jegyzeten (109/1). Az 1832. nov. 14. dátumú, elég rendetlen papíron az

$$(a \oplus b)^{c \oplus d} = p \oplus q \text{ -hoz}$$

hasonló összefüggések olvashatóak ($123/4^v$).

Feltűnnek ezek a jelek két olyan levélborítékon is, amelyeket BOLYAI JÁNOS részére címeztek Aradra. A kiterített borítékon a harmadfokú algebrai egyenlet megoldásához kapcsolódó írásokban láthatjuk a $\oplus$ és $\ominus$ jeleket. Az egyik borítékról az 1827. márc. 11-i dátum olvasható le ($1213/1\text{-}2^v$). De a $\oplus$ jel, a $\oplus 1=\sqrt{-1}$ magyarázattal még egy 1825-ös keltezésű lapon is felbukkan (1546/1). Ez azt jelentheti, hogy BOLYAI 1831 előtt is használta ezeket a szimbólumokat.

Még megjegyezzük, hogy egy Lembergből 1831-ben írt levelén viszont BOLYAI JÁNOS az $a+b\sqrt{-1}$ írásmódot választotta (92/1).

Végül álljon itt BOLYAI JÁNOSnak egy olyan javaslata, amelynek lényegét az utókor gyakran alkalmazza: *„Hogy a mathézis kedvéért több célszerű jegy legyen s nagyobb számítások egymásnak megfelelő betűk által könnyebben, átnézhetőleg vitessenek véghez: lehetne más nemzet betűjét például a német-, hellén-, sőt a román-, muszka-, zsidó- s a többiét is hasonlólag, mint a magyarét, kiművelni, vagy tökélyesítni, sőt a teljességért az ott hiányzó betűket is kipótolni*" (441/1).

2

A Bolyai-ládák

2.1. A kéziratos hagyaték sorsa

BOLYAI JÁNOS, a 31 éves korában nyugalmazott császári királyi kapitány első nagy csalódása miatt kiábrándultan, megtörten és betegen érkezett haza apjához 1833 nyarán, hogy életének utolsó 27 esztendejét gyermekkori álmodozásainak, tervezgetéseinek színhelyén, Marosvásárhelyen és Domáldon töltse el.

Ezekről az évekről nemrég még ezt írta egyik „méltatója": *életének második* fele haszontalanul, kényelmetlenül, anyagi gondok között vergődve telt el. Halálakor nagyszámú kéziratot hagyott hátra, amelyeket nem lehetett értékesíteni.

Valószínű, hogy ezeket a mondatokat a tájékozatlanság szülte, de tény, hogy BOLYAI JÁNOSnak, miután katonai pályafutását befejezte, valóban mostoha életsors jutott. Napjait átszövi a megnemértés, a betegség és a szegénység. De nem élt haszontalanul, hiába. Kényszerű nyugdíjaztatása után is sokat dolgozott. Elkészítette ugyan nagy munkáját, de „tüzes, gyors" szíve s elméje tovább forrt, nem engedte nyugodni. Napestig ül ezekben az években íróasztala mellett, hogy fóliáns nagyságú papírjait vagy sokszor apró papírszeletkéit teleírja a gondolatait megörökítő betűkkel. Sok ezer oldalnyi kéziratot hagy örökül.

Amikor a hűséges gondozó, SZŐTS JÚLIA remegő kézzel leírta, hogy „... így már nints mit tagadni, a Kapitány Úr nints többé ...", a marosvásárhelyi katonai várparancsnok BOLYAI JÁNOS minden írását lefoglaltatta, utasítást adott, hogy rakják azokat ládákba és vigyék be a várba. Meg kellett vizsgálni, hogy nincs-e bennük valamilyen katonai vonatkozású titok. Nem lehetett könnyű dolga annak a tisztnek, aki a nagy halom iratot átböngészte. Különös, de talán éppen ennek az önkényes intézkedésnek köszönhető, hogy a kéziratok nem semmisültek meg.

A ládák a későbbiek folyamán sok viszontagságon mentek át. Miután a vásárhelyi várban folyó vizsgálat nem talált katonai titkokat a sűrűn teleírt lapokban, átszállították azokat a városi rendőrségre, egy fészerbe. Végül az ősi iskola, a marosvásárhelyi Református Kollégium saját épületébe vitette a kéziratokat s ezzel megmentette az utókornak.

A hagyaték s a BOLYAI-geometria történetének is egyik legjelentősebb dátuma 1867, amikor az Appendix megjelent francia nyelven G. J. HOÜEL bordeaux-i egyetemi tanár fordításában [15]. Mintegy másfél évtizeden át HOÜEL volt a Bolyai-ügy legfáradhatatlanabb harcosa. Ő pedig érdeklődő kérdéseire SCHMIDT FERENCben talált rendkívül lelkes segítőtársat. SCHMIDT éppen HOÜEL kérésére írta meg a két BOLYAI életrajzát és közölte a Grunert-féle Archivban [100]. Ez az értekezés ismertette először világnyelven a két BOLYAI életrajzi adatait. Az Appendix francia fordítása a SCHMIDT által írott életrajzzal egybefűzve jelent meg 1867-ben [115].

A bordeaux-i kiadvány hatására itthon is felismerték a Bolyai-ügy jelentőségét. HUNYADY JENŐ az Akadémia egyik ülésén tájékoztatta a tagokat arról, hogy megjelent francia nyelven az Appendix és annak bevezetéseként a SCHMIDT FERENC (1827–1901) által írott életrajz. Azt indítványozta, hogy az Akadémia kérje kölcsön Marosvásárhelyről feldolgozás céljából a Bolyai-hagyatékot. Az Akadémia akkori főtitkára, ARANY JÁNOS 1868. június 15-én írt levelében kéri a Kollégium Igazgatóságától az iratokat átvizsgálásra.

A hagyaték végül is 1869 decemberében érkezett Pestre és felbontatlanul „letétetett" az Akadémia Levéltárába. Eleinte úgy tűnt, hogy a magyar matematikusok megfeledkeztek a ládákról. Két külföldi tudós, B. BONCAMPAGNI (1821–1894) és HOÜEL sürgetésére aztán az Akadémia 1871. október 16-i határozata értelmében megalakult a Bolyai-kéziratok átvizsgálására hivatott négytagú bizottság, amely azonnal megkezdte a munkát. A kézírásos hagyaték földolgozása vontatottan haladt. Az Akadémia 1874. március 16-i ülése jegyzőkönyve szerint „BOLYAI munkájának elkészülte bizonytalan, miután ez oly természetű, hogy rögtönözni nem lehet és sokszor tetemes anyag feldolgozása után sincs közölhető eredmény" [45, 14 old.].

A Bolyai-kéziratok átvizsgálása tehát nem vezetett konkrét eredményre és felhasználatlan maradt egészen 1894-ig. Ekkor érkezett meg ugyanis az Akadémiához a marosvásárhelyi ev. ref. kollégium igazgatóságának a Bolyai-hagyatékot visszakérő, és az átvizsgálás eredményéről tájékoztatást váró levele. A III. osztály határozata az alábbi volt:

„A szintén már hosszabb idő előtt beadott jelentések (KŐNIG GYULA és SCHMIDT FERENC részéről) értelmében ezen iratokban kiadásra alkalmas anyag

nem találtatván, az osztály részéről nem forog fenn nehézség azirant, hogy ezen *iratok jogos birtokosuknak visszaadassanak*" [45, 14 old.].

Ma tudjuk, hogy a jelentéseket nem előzte meg alapos kutatómunka. Már a rákövetkező évtizedekben P. STÄCKEL több dolgozatban és nevezetes monográfiájában megmutatta, hogy „ezen iratokban" van kiadásra alkalmas anyag. Most pedig egy évszázaddal később úgy érezzük, hogy könyvünkben is rácáfolunk az MTA III. (Math. és Term. tud.) osztályának 1894. évi határozatára.

Az iratok 1894-ben hiánytalanul visszakerültek eredeti tulajdonosukhoz. Ma ezeket a marosvásárhelyi Teleki–Bolyai Könyvtár őrzi [18]. A Magyar Tudományos Akadémia a maga Bolyai-gyűjteményét [12] a későbbi években alakította ki.

Az elkövetkező esztendőkben aztán fokozatosan lendült előre a Bolyai-kutatás. *Ha nem is tartozik szorosan a kéziratok feldolgozásához, de említsük* meg, hogy évtizedekig húzódó, lassú előkészítés után végül 1897-ben KŐNIG GYULA bemutathatta az Akadémia egyik ülésén a Tentamen második kiadásának első kötetét. A második kötet nagysoká, 1904 végén jelent meg.

A magyar tudomány BOLYAI JÁNOSsal szemben csak 100 éve, 1897-ben törlesztette régi adósságát. Ismét a lelkes SCHMIDT FERENC volt az, aki a nyomdai munka anyagi terhét is vállalva megjelenteti az Appendix-et magyarul (amikor már van francia [15], olasz, angol [13], sőt japán kiadása is; Tokióban az angol nyelvű [13] fordítást jelentették meg 1894-ben). Ugyancsak ő szorgalmazta a BOLYAI FARKAS és GAUSS közötti levelezésnek a kiadását. Évtizedekre terjedő fáradozását 1899-ben siker koronázta: a levelezést tartalmazó szép kötet egyidejűleg két helyen (Budapesten és Lipcsében) is megjelent [101]. A kiadványt egy fiatal matematikussal, PAUL STÄCKEL-lel készíttették elő.

PAUL STÄCKEL német egyetemi tanár áldozatos munkájának köszönhető, hogy BOLYAI JÁNOS kéziratban maradt matematikai eredményei nagy része a századforduló idején napvilágra került. STÄCKEL Marosvásárhelyre is ellátogatott, hogy minél alaposabban tanulmányozhassa a BOLYAIak munkáját. Kutatásainak eredményeit az értekezések egész sorában tette közzé. Kétkötetes könyve [106] ma is az az alapmű, amely a két BOLYAI életének és tevékenységének legteljesebb képét adja. A STÄCKEL-könyv ma már nyilvánvalóan sok helyen kiegészíthető az újabb vizsgálatok eredményeivel. Munkánk következő részében éppen ez a célunk. Szándékunk a STÄCKEL-mű, de más BOLYAI-monográfiák által hangoztatott pontatlanságokat és tévedéseket átértékelni és helyreigazítani.

STÄCKEL komoly érdemeket szerzett a BOLYAI-ügyben. De a STÄCKEL-mű létrejöttében a hazai magyar matematikusok is szerepet vállaltak. A magyar nyelvű szövegeket SCHMIDT FERENC, FEJÉR LIPÓT és mások ültették át németre, a

könyv végén található hetvenoldalas „Jegyzetek" anyagát főleg RÉTHY MÓR, KÜRSCHÁK JÓZSEF és SCHMIDT FERENC szolgáltatta [115].

2.2. Bolyai János följegyzései

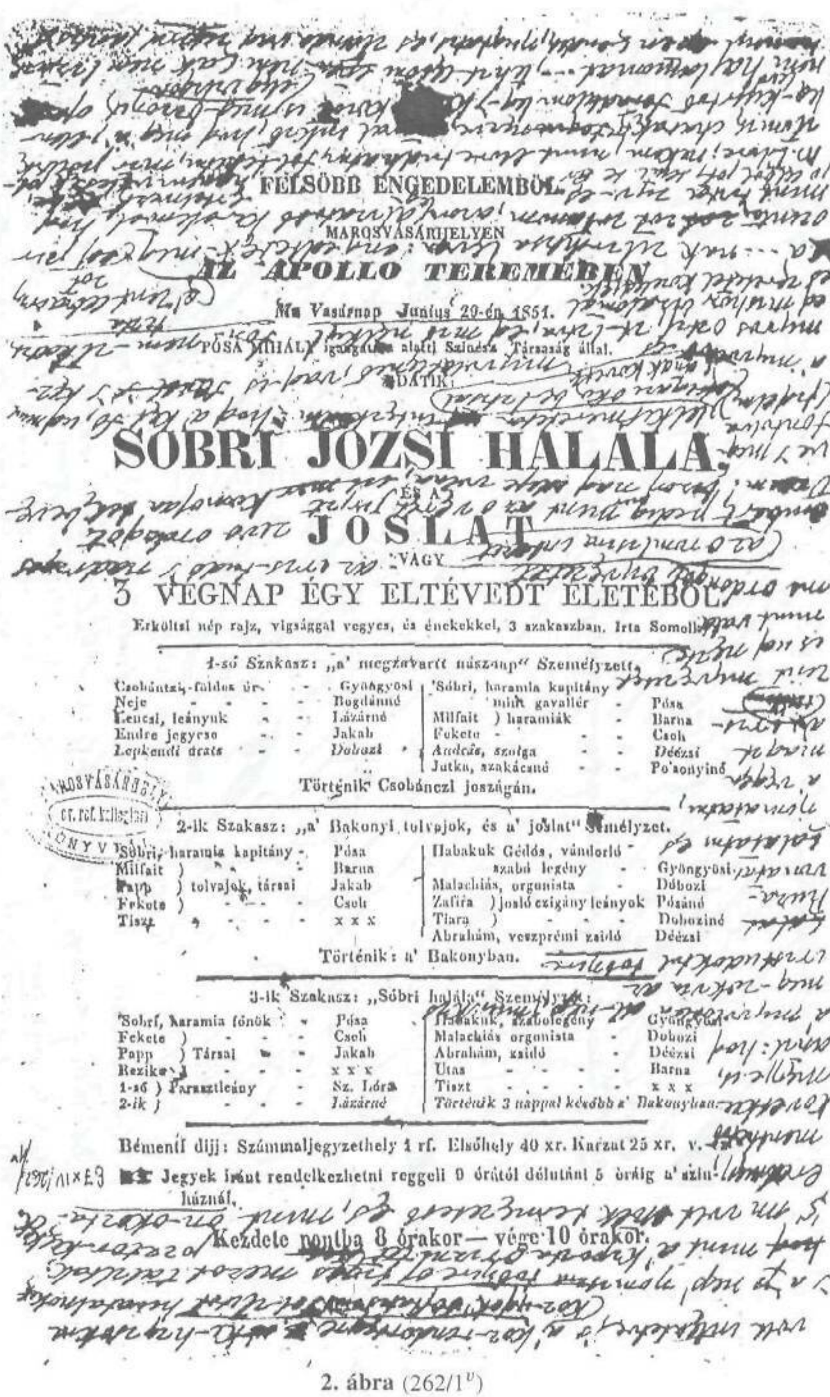
Nem könnyű a Bolyai-kéziratokat olvasni, bár a már sárguló papírlapok tanulmányozása minden türelmes Bolyai-kutatónak igazi élményt, sok örömet szerezhet. Ugyanakkor jogos egyes szerzők panasza a kéziratok kibetűzésének nehézségei miatt. BOLYAI JÁNOS följegyzései nem nyomtatásra kész dolgozatok, hanem befejezetlen tervezetek számos hézaggal, ismétléssel, törléssel, betoldásokkal. BOLYAI írásaiban maga szerkesztette betűket használ, sokszor elég nehézkes és szokatlan szimbolikájával kell megbirkóznunk. Új szavakat alkot. Nehéz stílusa könnyen kedvét szegi a kevéssé szívós kutatónak. Mindezek rendkívül megnehezítik és fárasztóvá teszik matematikai és más természetű följegyzéseinek a számbavételét. Maga is beismeri, hogy gyakran sok gyötrődéssel jár gondolatainak formába öntése. Találóan írja SZÉKELY JÁNOS „Bolyai hagyatéka" című szonettkoszorújában:

„Százszor betoldta, százszor húzta át,
Míg izzadozván meglelte az utat."

BOLYAI JÁNOS följegyzéseit írva nem gondolt arra, hogy azok *„tökélyesek"* legyenek, hiszen a maga számára írt, nem a nyilvánosságnak szánta azokat. A legszívesebben nagyméretű szürkés vagy kékes színű fóliánsokra írt. Úgy tűnik, ezeket nem tudta mindig megvásárolni s ha nem akadt más, minden keze ügyébe került papírt felhasznált, hogy gondolatait lejegyezze: szétterített régi levélborítékok, hivatalos okmányok, gyászjelentések, hirdetések, meghívók üresen maradt széleit vagy hátlapjait. Hagyatékában rengeteg dirib-darab papírra írt megnyírbált följegyzést találunk. Így vall erről – MANDICS GYÖRGY szavaival - BOLYAI JÁNOS:

„. . . . . Apró
papírszeletkék fuvarozzák a keservesen
kigyöngyözött eszmét. Most már csak a nyelv
szép formáját kell megtaláljam. . . "

Sokszor nagy gondot okoz az iratok időrendűségének a megállapítása. BOLYAI csak nagyon ritkán jelöli meg valamelyik írása keletkezésének időpontját. Még leveleit sem látta el mindig keltezéssel. Külön öröm a kutatónak, amikor



FELSÖBB ENGEDELEMBŐL

MAROSVÁSÁRHELYEN

AZ APOLLO TEREMÉBEN

Ma Vasárnap Junius 29-én 1851.

PÓSA MIHÁLY igazgatása alatti Színész Társaság által.

ADATIK:

SÓBRI JÓZSI HALÁLA,

ÉS A'

JÓSLAT

VAGY

3 VÉGNAP EGY ELTÉVEDT ÉLETÉBŐL.

Erkölcsi nép rajz, vigsággal vegyes, és énekekkel, 3 szakaszban. Irta Somolly.

1-ső Szakasz: „a' megzavartt nászap" Személyzett.

Csobánczi-földes úr -	Gyöngyösi	Sóbri, haramia kapitány mint gavallér -	Pósa
Neje -	Bogdánné	Milfait) haramiák -	Barna
Lencsi, leányuk -	Lázárné	Fekete -	Csoh
Endre jegyző -	Jakab	András, szolga -	Déézsi
Lepkendi deák -	Dobozi	Jutka, szakácsné -	Po'sonyiné

Történik Csobánczi jószágán.

2-ik Szakasz: „a' Bakonyi tolvajok, és a' jóslat" Személyzet.

Sóbri, haramia kapitány -	Pósa	Habakuk Gédós, vándorló szabó legény -	Gyöngyösi
Milfait) -	Barna	Malachiás, orgonista -	Dobozi
Papp) tolvajok, társai	Jakab	Zafira) jósló czigány leányok	Pósáné
Fekete) -	Csoh	Tiara) -	Dobozine
Tiszt -	x x x	Abrahám, veszprémi zsidó	Déézsi

Történik: a' Bakonyban.

3-ik Szakasz: „Sóbri halála" Személyzet:

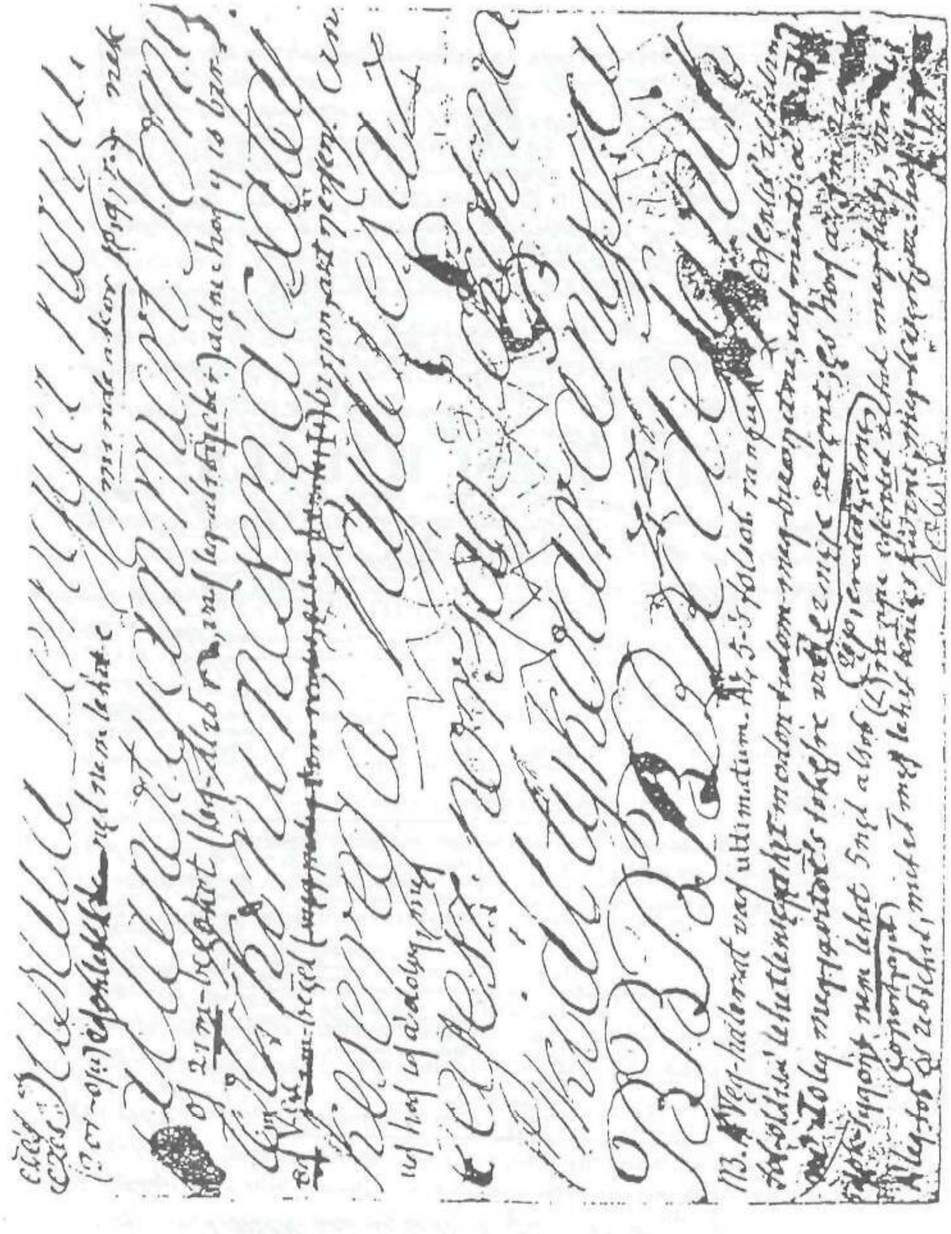
Sobri, haramia fönök -	Pósa	Habakuk, szabólegény -	Gyöngyösi
Fekete) -	Csoh	Malachiás orgonista -	Dobozi
Papp) Társai -	Jakab	Abrahám, zsidó -	Déézsi
Rezike) -	x x x	Utas -	Barna
1-ső) Parasztleány -	Sz. Lóra	Tiszt -	x x x
2-ik) -	Lázárné	Történik 3 nappal később a' Bakonyban.	

Bémeneti dijj: Számmaljegyzethely 1 rf. Elsőhely 40 xr. Karzat 25 xr. v. cz.

Jegyek iránt rendelkezhetni reggeli 9 órától délutáni 5 óráig a' szin-háznál.

Kezdete pontba 8 órakor — vége 10 órakor.

2. ábra (262/1^{v})



3. ábra (1293/1v)

egy kalendárium, sorsjegy hátán vagy iskolai értesítőn talál jegyzeteket, mert ezeken keltezés is olvasható s így ha nem is teljesen megbízhatóan, de eligazodhat az írás keletkezésének időpontjára vonatkozóan. Sok színházi műsorlap hátoldalát teleírta BOLYAI. Ezek alapján egy hozzáértő szakember már-már megírhatná a múlt századi Marosvásárhely színháztörténetét. Mindenesetre sok értékes adalékot szolgáltatnak a marosvásárhelyi színházi élet eseményeinek számbavételéhez (**2. ábra**). Felhasználta a Tentamen nyomtatott lapjait, saját régebbi jegyzeteit (ezek közül több szinte palimpszeszt-szerű {olyan pergamen, amelyről az eredeti írást eltávolították, s helyébe újat írtak}) s nem lehet meghatódás nélkül kézbe venni fia, BOLYAI DÉNES és leánya, BOLYAI AMÁLIA (Máli) megvonalkázott írásgyakorlatára odavetett sorait (**3. ábra**).

2.3. Miért jegyzetelt Bolyai János?

BOLYAI JÁNOSnak Marosvásárhelyen a Teleki–Bolyai Könyvtárban mintegy 14000 oldalnyi (ebből 1000 oldal diákkori jegyzet) kéziratát őrzik. A kéziratokat nagy dossziékban találjuk, megszámozva, leltározva. Ebben a formában való elrendezésüket ABAFÁY GUSZTÁV és BENKŐ SAMU végezte el 1953 és 1959 között. BENKŐ SAMU az, aki STÄCKEL után a legalaposabban áttanulmányozta BOLYAI JÁNOS hagyatékának nem matematikai tárgyú kéziratait. A hosszú évek *munkájának eredménye – több részlettanulmány mellett* – BOLYAI JÁNOS *vallomásai* című könyve [6], majd az Apa és fia tanulmánykötet [8]. Írásainak nyomán a tépelődő, küzdő, elmélkedő ember bontakozik ki előttünk. Könyveiben azt bizonyítja, hogy a kéziratban maradt Üdvtanban ugyanaz a nagy összefüggések felismerésére zseniális elme munkál, mint az Appendixben, csupán meglátásai nem korlátozódnak szakterületére, hanem kiterjednek az élet és a társadalom általános vonatkozásaira is.

BENKŐ SAMU a marosvásárhelyi kéziratok szétszóródott papírhalmazának rendberakása és elemzése alapján emberként állítja elénk a nagy matematikust. BENKŐ úgy véli: „A magános ember vallomásai ezek. Előre eltervezett rend nélkül keletkezett írások; papírra vetésükkel az egyedüllét börtönéből keresett szabadulást és kapcsolatot a világgal az onnan kiszorult rendkívüli termékenységű elme ... Ő – leszámítva apjához intézett leveleit – nem oszthatta meg senkivel gondolatait, tudományos, elméleti gondjait. Így lett egyetlen bizalmasa, meghallgatója a türelmes papír" ([6], 10 old.).

A följegyzések nagy részén valóban meglátszik, hogy azokat a magány szülte, saját magának írta BOLYAI JÁNOS. Azt azonban nem állíthatjuk, hogy ennyivel

megelégedett volna. Ezek csupán még nem kellően csiszolt, ideiglenesen lejegyzett gondolatok. Biztosan nem akarta, hogy nyom nélkül vesszen el az összehalmozott sok betű, vonal, képlet, gondolat. Bizony, szerette volna azokat megosztani a nagy nyilvánossággal. Olvassuk csak az alábbi sorokat: „... *bár is én itt semmit se járok correct conceptus (rendszerező összefoglalás után, nyakra főre sietve) a legderekabb és, a tanban, hatalmasabb eszmék, csak az elfeledés elleni hirtelen papírra vetésre is idő kell, úgy, hogy alig győzöm ezt még mind eddig is. Azonban közelít azon határidő, mikor már elérve a kitűzött célt, a meglévő anyagot kezdem kireszelve, simítva, fényesítve (mi utóbbi azonban nem a szemnek, csak a tanban jó) egy szóval kiművelve, tökélyesítve tisztára és kitelhető jól és kellemesen olvashatólag írni*" (800/1^v). Egy másik helyen: „*Tanom lényegét három nyelven, magyarul, németül és latinul szándoklom kiadni*" (743/3). Vagy az algebrai egyenletek megoldhatóságát vizsgálva: „... *egyenletek geber föloldási módja ... hatalmamban lévén, melyeket is ha a jelen vizsga jól vagy kedvezőleg fogadtatik: közölni szándoklok*" (710/1). BOLYAI nem fél a bírálattól sem. Ha a munkája megjelenik, az olvasót így szólítja meg: „*Máson lévén a sor szigorán vizsgálni, s ha szükségesnek vagy helyesnek találja az illedelem határai között kiméletlenül és minden keménységgel és szigorral cáfolni: mire a Tisztelt Olvasót is illendőleg megkérem*" (710/2). Biztosan közlésre szánt szöveg az is, amelynek egyik mondata így hangzik: „*Azért ideje már e kis ártatlan csinnek véget vetni s a Tisztelt Olvasót fölvilágosítani, többé zavarban nem hagyni*" (868/1). Egy kis cédulán (996/1) így kezdi az egyelőre még nem létező kiadónak szánt utasításait: „*Jelen kéziratom Kiadó-s Kinyomója figyeltetik arra, hogy az ebben vörös íron – vagy plajbásszal írott, tehát a jelen jegyzet is, mint csak a Kiadó számára való, nem kinyomandó*". Íme egy – német szövegben eldugott – mondat: „*Egyszer mindent a Világ stilja szerint, a mellett saját Appendixi s még több rövidségű tökéletesebb stilomon kiadni*" (1177/5). Egy helyen még azt is megjegyzi, hogy munkáit almazöld papíron szeretné megjelentetni. Csak sajnálhatjuk, hogy erre sohasem került sor.

Többször éri BOLYAI JÁNOSt az a „vád", hogy miért hallgatott el az Appendix megjelenése után. Miért nem hozta nyilvánosságra későbbi fölfedezéseit? Egyik oka ennek – SZÉNÁSSY BARNA szerint – az Appendix közönyös fogadtatása, a várt siker elmaradása és emiatt bekövetkezett kedveszegettség. De anyagi okok is szerepet játszhattak, hisz mind az apa, mind a fiú saját költségén adta ki írásait, tudományos elszigeteltségükben nem találtak erre más lehetőséget. A kiadáshoz szükséges anyagi terheket pedig BOLYAI JÁNOS szerény nyugdíjából nem vállalhatta.

A fentiek szerint az első magyarázatot kiigazíthatjuk. Az Appendix sikertelensége nem törte össze teljesen BOLYAI JÁNOSt. Művének kiadása után sem

maradt tétlen. Egy pillanatig sem kételkedett munkája értékében és bízott az idő utólagos jóvátételében. 1844-ből származó saját vallomása szerint BOLYAI JÁNOS leginkább azért várt a publikálással, mert írásait nem sikerült még az általa megkívánt tökéletes formába öntenie. Így ír erről: „... *azon rengetegnek, mely már szándékozok a köz-jóra világ elébe adni, némi jeléűl annak, hogy koránt sem aludtam el életemet, s nem vagyok azon meg-vettetésre méltó, millyel némelyek hát megett illetnek. Csak az a fatális körülmény szúr, fúr most is, mi tanaim kiadásától eddig is mind el-tartott, hogy a tan míg TÖKÉLYES rendben, idomban nincs, vagyis míg kijelelése is nem tökélyes. Bármily tökélyesen tudja is az ember maga mind értésre, mind kijelelésre nézve, de ha az olvasót is meg nem barátkoztatta még a helyes nyelvvel, oly mint mikor egy darázsfészekbe nyúl az ember*" (445/1^{v}).

Szándékában volt, hogy írásaival fölkeresi az általa ismert két matematikai folyóiratot is, a Crelle's Journal-t és a Grunert Archiv-ot. Papírjai között fönnmaradt két olyan lap, amelyeken azonnali feladatait jegyezte fel Teendők vagy igazitandóim 1851. nov 24-e óta, (474/1) és Teendőim 1856. augusztus 1-től kezdve (459/1) címen. A „*naponként reggel átnézendő*" tennivalók között miután felsorolja a háztartásához télire szükséges holmikat (szekér fa, 25 jó gyertya, paprádi(?) kötet papír, törökbúza, aszú gyümölcs, véka dió stb.), megjegyzi, hogy vissza kell kérnie apjától a leveleit. Legfontosabbnak tanai „rendbe s tisztába *írását*" tartja amelyeket magyarul Budapestre (a Tudós Társulathoz), németül és latinul Bécsbe („*a cs. k. tanos akadémiához*") akar küldeni. (Hasonló tervekről már 1844-ben írt egyik levelében is olvashattunk az 1.2. paragrafusban is.) De Göttingába, Berlinbe („*ott a Crelle-hez és Grunert-hez*") Párizsba, Rómába is szándékában van – jegyzete szerint – ezeket elküldeni. Legfőbb művéről ezt írja: „*... s az Appendixnek mint öntalálmányomnak megvédése vagy tiszta magos fénybe helyezésére ama német archivum vagy tudományos gyűjteménybe fölküldetni s mindeniket illő célszerüleg el-szétosztani a Földön*".

A kézirat egyik mondata azt jelzi, hogy BOLYAI JÁNOS gondolatai között 1851-ben még egy, az Akadémiára benyújtandó pályázat lehetősége is felmerült: „*A bécsi s magyar akadémia jutalom kérdéseit s jutalom díjait megtudni s ha célszerűnek s lehetőnek találom azokra megfelelni, eleget tenni...*" (474/1).

A „*Montucla által méltán dicsért*" (741/1) L. MASCHERONI (1750–1800) könyvének hatását érezzük a „teendők" következő mondatán: „*egy cirkalom nyílássali föloldását az egész* EUKLID *első könyvébeni föladatoknak*". Saját magától kérdezi, hogy vajon melyik az az egyenlete LEIBNIZnek, amelyet NEWTON nem, de talán BERNOULLI JÁNOS megoldott?

Még egy érdekes mondatfoszlány húzódik meg a sorok között: *„egyelőre őrnagyi rang s állodalmi tanácsnok*". Vajon mire gondolt BOLYAI, amikor ezeket a szavakat papírra vetette?

2.4. Utinam Gauss superstes esset!

Fájdalom, BOLYAI JÁNOS tipikus példája a szerencsétlen sorsú tudósnak. Éveit keserű csalódások kísérték. Még kamasz, amikor csalódnia kellett eszményképében, GAUSSban, amiért apja legmeghittebbnek vélt barátja nem fogadta őt házába. Miután zseniális geometriája nem kapta meg a kellő elismerést, öt év múlva egy újabb rendkívüli mű megírására vállakozott, de a pályabírák a Responsiót sem értették meg, ő megint csak a csalódással maradt. Még városa is, a legjobb esetben közönnyel szemléli vívódásait. Tragédiának nevezhetjük életét, mert nagyszerű felfedezéseit a maradi társadalom képtelen volt befogadni. A Tentamen egyik példánya az Appendixszel együtt a Magyar Tudományos Akadémia polcain porosodott, de életében BOLYAI JÁNOSnak még a neve sem hagzott el ennek falai között. A Tentamen köteteit BOLYAI FARKAS küldte el a Magyar Tudós Társaság címére mindjárt a megjelenésük után. Az I. kötetet 1833 augusztusában küldte meg, a II. kötet ajándékozását 1835. május 1-jén jelenti a főtitkár [45, 110]. Ezek a példányok ma is megtalálhatóak a MTA Könyvtárában ([12] az 542.012 könyvtári jelzet alatt). Mindkét kötetben az előzéklapon autográf írással ez olvasható: „A m.t. társaságnak BOLYAI FARKAS mint szerző".

DÖBRENTEI GÁBOR titoknok, akihez a küldemények érkeztek, még augusztus 29-én válaszolt BOLYAI FARKASnak: „Könyvedet tehát nevedben a Társaságnak október 1-ső napján adom majd bé...". Figyelemre méltóak a levél következő mondatai: „Rád nézve is egyenesen írtam midőn kívántam, hogy mathesisi munkádat magyarul írd, mivel 3^d vidéki rendes tagnak óhajtottalak majd 300 pengő forinttal, ami mellett már ezután deák munkád miatt nem szólhatok; fijadra a Kapitányra nézve is az a barátságos észrevételem van, hogy ha magyarul adja ki munkáját lehet még helybeli tag itt 500 pengő forinttal, mely summa penziójához egykor jól járulna; lehet vidéki rendes tag 300 pengő forinttal".

DÖBRENTEI úgy vélte, hogy a latin nyelvű Tentamen miatt nem vetheti fel a Tudós Társaságban BOLYAI FARKAS rendes tagságának ajánlását. 1835 szeptemberétől már nem DÖBRENTEI volt a Társaság titoknoka. Utóda nyilván nem ismerte közelebbről BOLYAI FARKASt. A körülmények kedvezőtlen alakulása folytán többé nem került sor a rendes tagsági ügyre [45, 7-8 old.].

Sajnos a reformkori Akadémia nem kis mértékben hibás, hogy Magyarországon a természettudományok terén nem alakulhatott ki olyan szellemi klíma,

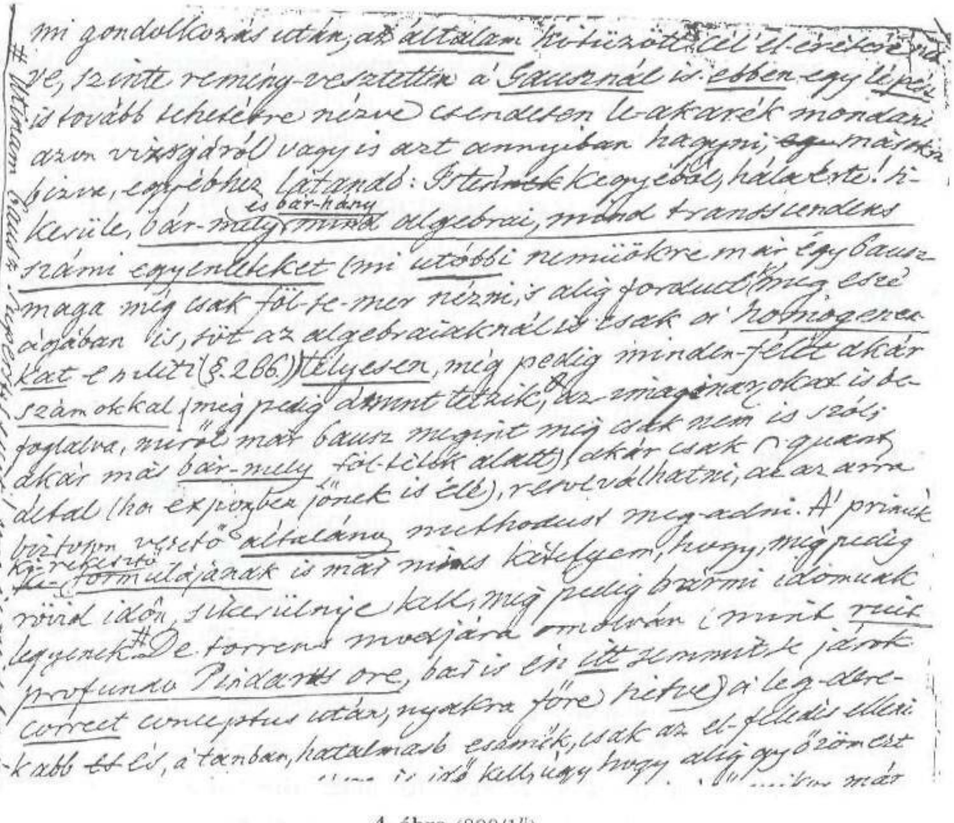
mely alkalmas lett volna korszerű gondolatok befogadására. Az igazi tragédia – írja VEKERDI LÁSZLÓ – a matematikában zajlott le, jóvátehetetlenül. A Matematikai Osztály tagjai hatalmas buzgalommal, de hiányos szakmai hozzáértéssel láttak hozzá tisztüknek. Ítéleteik felületesek, s többnyire személyes kapcsolataik által irányítottak. Ez volt az oka annak, hogy tudós társaságunk eléggé szégyenletesen bánt a két BOLYAI munkáival. Így például VÁLLAS ANTAL a honi matematikai irodalom áttekintésében (Tudománytár 1836) hosszan dicséri NAGY KÁROLY aritmetikáját, de felsorolásában csak megemlíti BOLYAI FARKAS remekét, Az artimetika elejét, sőt a Tentament is, anélkül, hogy egyetlen elismerő vagy akárcsak tárgyilagosan ismertető szót is vesztegetne rájuk.

A Matematikai Osztály rendes tagjai az Akadémia Könyvtárában meglévő Tentamen-példányt (s annak „Függelékét") még csak meg sem nézték. Pedig BOLYAI FARKAS főművének magyar nyelvű átdolgozását is felajánlotta: „hogy diák halottja valaha salakjából megtisztulva magyarul támad fel". Valósággal *megdöbbentő, hogy a Tentamen mennyire ismeretlen maradt.* A Tudós Társaság például 1844-ben a paralelák problémáját javasolta jutalomkérdésnek, holott a Tentamen és benne az Appendix egy példánya már 12 éve ott feküdt a Társaság könyvtárában [1, 29 old.]. Nem kell túlságosan nagy képzelőerő ahhoz, hogy belássuk, mit tehetett volna az Akadémia, ha még idejében s itthon kellő helyre kerülhetett volna BOLYAI JÁNOS fölfedezése [124, 63-66 old.].

Mégis mennyi elismerés jutott élete folyamán BOLYAI JÁNOSNAK? Talán GAUSS kétes értékű mondatai közül a következő: „Nagyon meglepett ... és nagyon örvendek, hogy éppen régi barátom fia az, aki engem ilyen csodálatos módon megelőzött" [101, 112-113 old.]. A levél többi sorai, sajnos, erősen tompítják ezeket a szavakat.

Számos írásából úgy érezzük, hogy nem vágyódott a külső dicsőségre. „... *nem vágytam* – írja önéletrajzában – *az afféle, mások által vadásztatni szokott, külső halhatatlanságra...*" (1086). Inkább megértésre, mint dicsőségre áhítozott. A tudósnak az a fizetsége, ha fáradságos munkájával megtalálja az igazságot. Azzal vigasztalta magát, hogy *a feltalálás öröme vetekszik mindenféle elismerés dicsőségével.* Ugyanakkor minden sorából kiérződik, hogy ennek a beteg, magányosságában megkeseredett embernek szigorú homlokráncai ugyancsak kisimulnának az elismerés akármilyen parányi sugarától is [6, 42 old.].

Amikor abban reménykedik, hogy sikerül megtalálnia a prímszámok képletét, apjának írt egyik levelének oldaljegyzetében így kiált fel: „*Utinam* GAUSS *superstes esset!*" {Bárcsak GAUSS még élne!}. *Erre és még sok más hasonlók eléggé legtekintélyesebb méltányolhatására nézve is*" ($800/1^{v}$) (**4. ábra**). Lehet-e közömbösen olvasni BOLYAI JÁNOS kívánságát? Ki ne érezné ebből a néhány



4. ábra (800/1^v)

szavas széljegyzetből BOLYAI titkos vágyát, hogy bárcsak GAUSS is tudomást szerezne az ő fontos felfedezéséről? Végül is mennyire sóvárgott az elismerésért. S ezt egész életében leginkább GAUSStól várta.

„BOLYAI JÁNOSt nem az elismerés kimaradása – írja SARLÓSKA ERNŐ –, hanem a reátörő gondolatok árja sodorja ki társadalmából. Nem a barikádokon kell keresni hozzá a mindent megmagyarázó tettet. A tizenkilencedik század nagy magányosai szolgáltatják a kulcsot sorsához, azok a sóhajok, melyek keseredetten először adnak számot a kalandról, mely arra vár, ki az ideák ingoványába téved" [95].

2.5. Matematikai természetű iratok

BENKŐ SAMU, érthető módon, csak a nem matematikai természetű Bolyai-iratokat tanulmányozta. Nem lévén szakember, a matematikai problémákat tartalmazó jegyzeteket nem is rendszerezhette. „. . . a matematikai tárgyú irományo-

kat – olvassuk [7, 360 old.] – pusztán külső ismérvek (papír, őrszavak) alapján csoportosítottuk, illetőleg leltároztuk és matematikatörténeti iskolázottság híján szüntelenül elégedetlenkedtünk magunkkal, hogy alig hasznosíthatunk valamit a szövegek kínálta belső összefüggésekből."

Ezek az írások valóban ma is elég nagy összevisszaságban találhatóak a különböző dossziékban. Ezért sokszor egy megkezdett gondolat vagy ötlet folytatását csak nagynehezen pillanthatjuk meg, néha hetek, hónapok munkájának eredményeképpen. Ha egyáltalán létezik valahol folytatás.

Sajnos a BOLYAI JÁNOS által készített jegyzetek nem maradtak fenn hiánytalanul. Sok elkallódott közülük. Tudomásunk van arról, hogy annak idején az egyik kollégiumi tanár, SZABÓ SÁMUEL, azért, hogy az iratokat kényelmesebben tanulmányozhassa, többet hazavitt közülük. A nála felejtődött lapokat fia csak jóval apja halála után találta meg. Vajon akkor hiánytalanul előkerültek a papírok? Szerencsére a fiú, SZABÓ PÉTER az atyja hagyatékában talált Bolyai-kéziratokat megőrizte, feldolgozta s ezzel felbecsülhetetlen munkát végzett. Keletkezett az iratokban nagyobb kár is. BOLYAI JÁNOS féltestvére, BOLYAI GERGELY (1826–1890) sem őrizte elég gonddal a birtokában lévőket. Sajnálkozva olvassuk egyik, 1884-ben írt levelét: „... Jánosnak sok levele volt, mind megsemmisítettem. Azokban igaz, hogy roppant sok mathematicum volt..." [45]. Lehetnek egyes családok birtokában is BOLYAItól származó kéziratok. Könnyen elképzelhető, hogy a leglelkesebb Bolyai-kutató, SCHMIDT FERENC leszármazottainak birtokában is vannak még Bolyai-iratok. Nem megalapozatlan az a feltevés, miszerint STÄCKEL, mivel nem tudott huzamosabb ideig Marosvásárhelyen tartózkodni, feldolgozás céljából több kéziratot magával vitt, amelyek aztán többé nem kerültek vissza eredeti helyükre. De ez természetesen nem csak STÄCKELlel történhetett meg [9, 14 old.]. Annak idején magunk is tapasztaltuk, hogy a Teleki–Bolyai Könyvtárban őrzött kéziratok között nincs meg minden, ami PAUL STÄCKEL, illetőleg a neki (főleg magyar nyelvű szövegek fordításával) segédkező tudósok kezén megfordult – írja BENKŐ SAMU [7, 360 old.]. Valószínűleg sok kéziratos anyag tűnt el a BOLYAI FARKAS halálát követő napokban. A gyarló felügyelet lehetővé tette egy-egy kötegnek a megsemmisítését. Csak valami effélével magyarázhatjuk, hogy János több, apjához intézett levelén kívül teljességgel hiányoznak az apa kézirati hagyatékából legbensőbb barátainak, BODOR PÁLnak, JAKAB LAJOSnak, BOD PÉTERnek a hozzá küldött levelei is. Ezeknek kötegestől kellett eltűnniök [20, 25 old.].

E könyv írója hosszasan kereste például azt a cédulát, amelyen STÄCKEL szerint [106, 1:254 és 277 old.] BOLYAI összeállította az általa megoldhatónak vélt problémákat, de minden fáradozása hiábavalónak bizonyult. Valószínűleg a végleg megsemmisült íratok közé kerültek azok a jegyzetek is, amelyeken BOLYAI JÁNOS „*tisztán, finom úton* ..." (445/3^{v}) bebizonyította a klasszikus algebra alaptételét.

2.6. Milyen nyelven írt Bolyai?

BOLYAI JÁNOS a kiadásra szánt munkáit, de saját magának lejegyzett gondolatait is három nyelven írta le: magyarul, latinul és németül (természetesen gót betűket is használt). A Scientia Spatii latinul jelent meg, de ismerjük a német Raumlehre változatát is. Lehetséges, hogy 1825-ben az apjának átadott példányt magyar nyelven fogalmazta. Nem tudhatjuk. Kétségtelen viszont, hogy magyarul gondolta ki. A Responsiót és a komplex számokról készült több más dolgozatát latinul írta. LOBACSEVSZKIJ művéhez fűzött Észrevételeit magyar nyelven örökíti meg. Amint már fennebb láttuk (2.3.§), munkáit is három nyelven, magyarul, németül és latinul szerette volna kiadni (743/3).

A kéziratok jegyzetelése, másolása közben két, ezzel a kérdéskörrel kapcsolatos, igen érdekes följegyzésre találtam. Ezeken a cédulákon BOLYAI JÁNOS azt az elhatározását rögzíti, hogy a következő években anyanyelvén fog írni. „*magam pedig e tárgyban* – írja apja egyik levelére – *nagyobbára 1842 óta (mikor, addig mind németül írva) legelőbb fordítottam történetesen figyelmemet a magyarra s avval együtt a nyelvre komolyabban midőn az alapokat még fiatal koromban megvetettem...*" (1399/1). Ceruzával írt jegyzet a következő: „*... végre megláttam az Atyám 1830-ban kijött Arithmetika Elejét s abban betűinek s műszavainak javítása s nyelvünk természetével megegyező újbóli teremtése iránt tett kísérleteket: 1842 nyara óta némi apróbb tanulmányok után anyanyelvemre s annak kitűnő derék tulajdonaira közelebbről kezdettem figyelmemet s ... azóta helyesnek tanáltam magamat legelőbb magyarul leendő kiadására tanom lényegének*" (1491/1). 1846 körül a következőképpen ír: „*Én ... a magyar nemzetet s nyelvet különösön szeretem, s éppen javát kívánom eszközölni mint az is bizonyítja, hogy tanaimat magyarul írtam, s írom jelenit is*" (1086/3).

Ezután a hagyatékban valóban megszaporodnak a magyar nyelvű írások. Gondolhatnánk arra, hogy ilyenformán több irat keletkezésének időpontjára könnyebben következtethetünk. Az időrendiség kérdésében azonban ez a szempont sem nyújt teljes biztonságot, mivel elég gyakran bukkanunk német nyelvű jegyzetekre az 1842-es év után is.

BOLYAI JÁNOS több idegen nyelvet ismert és megvolt benne az igény, hogy újabbakat tanuljon meg. Így vall erről: „*N.B. ha csakugyan kivált miután egy néhány közelebbről érdekesebb nyölvvel némileg, meglehetősen ismeretes vagyok (magyar, német, latin, frank, olasz, román -), még más nyölvet akarok tanulni, egyik különösen a sinnai* {kinai} *és japáni lenne ...*" (845/8) és [6, 198 old.].

2.7. Bolyai János jelrendszere

Megnehezíti a Bolyai-hagyaték számbavételét a BOLYAI JÁNOS által sok helyen bevezetett, néhol eléggé nehézkes, új jelölés. Lehet, éppen ez a szokatlan szimbolika is egyik oka annak, hogy még mindig feldolgozatlan a hagyaték. Emellett nem szorgalmazzák ezt a munkát az olyan kishitű „biztatások" sem, amelyeket például egyik matematikusunk tollából olvashatunk: „... a Marosvásárhelyen őrzött Bolyai-hagyaték alapos átvizsgálásra, a kéziratok ismert része is újabb átolvasásra érdemes – bár túlzott reményeket táplálni nem helyes..." (MTA III. Osztály Közleményei, **3** (1953), 291 old.). BOLYAI jelöléseinek megfejtése türelmes, aprólékos munkát igényel. Néha csak nagyszámú oldal összehasonlítása után találjuk meg ezek nyitját. Könyvünkben egy teljes fejezetet szentelünk a feloldott szimbólumok ismertetésére. Most csak néhányat mutatunk be ezekből, csatolva BOLYAI magyarázatait is, amelyekkel megokolja bevezetésüknek előnyeit. Ízelítőül íme néhány példa:

„*Legyen több csín, főleg pedig a »d« betűnek állandólagi el nem foglalása s egyéb célrai máskénti használhatásáért a szokott »d« helyett »ꝺ«, hogy röviden szólhassak ... differenciál jel: mi jelentvénye e jelnek a »d«-hezi sok hasonlatjánál fogva, bárki emlékébe azonnal könnyen benyomódhatik s előfordulás alkalmával magát önként feltolja.*

$ꝺ_x$ y *az: mi y-nak x-re nézti diferentiálja*" (1443/3).

„... *idő, tenta s rézpor s fáradság kevesbitéséért s mocsokra kevesebb alkalom-adásért »d« helyett* $\overset{|}{\odot}$ *irok...*" (1323/1).

A nulla jól ismert és általánosan használt „O" jelét sok helyen „*száműzi*" BOLYAI, de nem teljesen.

„... *jobb lenne bár is kissé fáradságosb, kényelmetlenebb »0«-t írni »O« helyett...*" írja az 1389/3 oldalon. (1844-ben még nem használja ezt a jelet (7.2.§)) Ehhez a jelöléshez aztán bővebb megjegyzést, magyarázatot is fűz: „*De mennyit vesződtek eleink betűik tökélyesbitésével: láthatni Fogarasi Művelt magyar nyelvtanja elején, hol is például csak az »O«-t is, mint emlékszem 38(!) féleképpen írták ... a legegyszerűbbet mégis el nem tanálva. Aki Fogarai lapját látja jelen tökélyes betüink minden becs fölötti magas becsét ... sokkal elevenebben érzendi*" (597/7).

A „O" „becsületét" a kongruenciák elméletében állítja helyre: „*A* GAUSS *által használt* $a \equiv b$ (mod c) *helyett az »*$a \equiv b\,O\,c$*« jelölés nemcsak egyszerűbb, rövidebb, könnyebb, de a betűket és zárójeleket egyetlen »0«-ba tesszük össze*" (1190/29). Írja azt is, hogy az $m\,O\,A \equiv a$ egyszerű, kiváló és ésszerű ($121/6^{v}$, 7^{v}).

Az „O"-val az Appendixben is találkozunk. Az r sugarú kör abszolút geometriai kerületét BOLYAI „Or"-rel jelöli.

A komplex számok írásánál általa igen kedvelt szimbólumokat használ. Nála a „ $\oplus b$" jelentése ib ($i=\sqrt{-1}$), „ $\ominus b$"-é pedig $-ib$. Ezek szerint BOLYAI az $a+ib$-t, illetve az $a-ib$-t így írta:

$$a \oplus b,$$

illetve

$$a \ominus b.$$

Egy az 1850-es évek derekából származó írásán így ír ezekről: „*Ezen* »$\oplus$«, »$\ominus$« *jegyekkel már szinte egy fertály évszázad (1831 első fele) óta nagy kényelem- és gyönyörrel élek és oly szép- vagy csinosak általában célszerű- és tökélyeseknek találom és nagyon remélem és erősen hiszem, hogy meglátva az egész math. Világ azonnal megkedvelve mohón elfogadja, hogy még a jövő életekben sem hiszem jobbak legyenek*" (800/3 és 3^v). Másutt (1348/11) így magyarázza a fenti jelek bevezetésének szükségességét: „*Legyen nem csak rövidségért, egyszerübb, könnyübb s jobb izlésért, hanem a tan metaphysikája helyesbb fölfogásáért is* $\oplus$ *s* $\ominus$ *(a becsei* $\sqrt{-1}$*)-nek (melyet* GAUSS *+i és* $-i$*-vel jegyez).*" Ezeket a szimbólumokat már megtaláljuk több, Olmützban készült jegyzeten: egy 1830. március 10-én keltezett okmányon (1526/1), aztán az 1833. nov 14-én készült jegyzeten (109/1). Az 1832. nov. 14. dátumú, elég rendetlen papíron az

$$(a \oplus b)^{c \oplus d} = p \oplus q \text{ -hoz}$$

hasonló összefüggések olvashatóak ($123/4^v$).

Feltűnnek ezek a jelek két olyan levélborítékon is, amelyeket BOLYAI JÁNOS részére címeztek Aradra. A kiterített borítékon a harmadfokú algebrai egyenlet megoldásához kapcsolódó írásokban láthatjuk a $\oplus$ és $\ominus$ jeleket. Az egyik borítékról az 1827. márc. 11-i dátum olvasható le ($1213/1\text{-}2^v$). De a $\oplus$ jel, a $\oplus 1=\sqrt{-1}$ magyarázattal még egy 1825-ös keltezésű lapon is felbukkan (1546/1). Ez azt jelentheti, hogy BOLYAI 1831 előtt is használta ezeket a szimbólumokat.

Még megjegyezzük, hogy egy Lembergből 1831-ben írt levelén viszont BOLYAI JÁNOS az $a+b\sqrt{-1}$ írásmódot választotta (92/1).

Végül álljon itt BOLYAI JÁNOSnak egy olyan javaslata, amelynek lényegét az utókor gyakran alkalmazza: „*Hogy a mathézis kedvéért több célszerű jegy legyen s nagyobb számítások egymásnak megfelelő betűk által könnyebben, átnézhetőleg vitessenek véghez: lehetne más nemzet betűjét például a német-, hellén-, sőt a román-, muszka-, zsidó- s a többiét is hasonlólag, mint a magyarét, kiművelni, vagy tökélyesítni, sőt a teljességért az ott hiányzó betűket is kipótolni*" (441/1).

3

Bolyai János matematikai olvasmányai

3.1. Bolyai matematikai műveltsége

Életrajzíróinak egyöntetű véleménye szerint BOLYAI JÁNOS matematikai képzettsége a korabeli matematikai ismeretek tekintetében vázlatos volt. A bécsi Akadémián az ún. felsőbb matematikából – az Akadémia katonai célkitűzései miatt – csak igen keveset tanult. Domáldi, majd marosvásárhelyi évei alatt igencsak szűkében volt a tudományos segédeszközöknek. A szakkönyvek, az akkor nyugaton és keleten is már létező és színvonalas matematikai folyóiratok, az állandó serkentő tudományos környezet hiánya bénítólag hatottak erőfeszítéseire. Elszigetelt, magányos tudós volt.

Próbáljuk meg az alábbiakban aprólékosabban megvizsgálni ezt a kérdést és az eddig ismeretlen dokumentumokat figyelembe véve feltérképezni BOLYAI JÁNOS ismeretanyagát. Álljunk meg az újabban feltárt írások, egy-egy hosszabb szövegben megbúvó nyilatkozatok olvasása közben s kíséreljük meg azok lényegét jobban megértve vitába szállni az elmarasztaló véleményekkel. Hátha nem olyan sötét a kép!

Való igaz, hogy korának sok matematikai felfedezése nem jutott el hozzá. Bár kortársa N. ABELnek és E. GALOISnak (1811–1832), munkásságukról mit sem tudott. Pedig ismerhette volna azokat, ha kezébe kerülnek a berlini „Crelle's Journal" 1826-os és a párizsi Journal de mathématique 1846-os számai. Amint tudjuk, a német folyóiratban jelent meg ABEL hibátlan bizonyítása a négynél magasabb fokú egyenletek algebrai megoldhatatlanságáról, GALOIS írásait pedig J. LIOUVILLE (1809–1882) még BOLYAI JÁNOS életében közzéteszi a francia lapban. Nem értesül A. CAUCHY (1789–1857) komplex függvénytani vizsgálatáról,

sem B. RIEMANN munkásságáról. Jegyzeteiben sehol sem említi például másik két kortársa, G. EISENSTEIN (1823–1852) és L. DIRICHLET (1805–1859) nevét. Még GAUSS munkásságának eredményeit is csak kis részben ismerte. Így például GAUSS felületelméleti kutatásairól – a Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827) című művéről – élete végéig sem szerzett tudomást. Nem olvasta GAUSSnak a komplex egészek elméletéről 1832-ben megjelent részletes [49] dolgozatát.

Milyen különös, hogy FERDINAND MINDING (1806–1885) tartui professzor még BOLYAI életében felfedezte és tanulmányozta azt a felületet, a pszeudoszférát, amelyen lokálisan érvényesek a nemeuklidészi geometria tételei. MINDING ezt az eredményét 1840-ben közölte, írásait azonban BOLYAI nem ismerte.

BOLYAI JÁNOS nem tudott J. H. LAMBERTnek az euklidészi párhuzamossági axiómát indirekt úton bizonyítani iparkodó vizsgálatok terén elért eredményeiről sem, így azokból nem meríthetett semmiféle ötletet. Ezt onnan tudjuk, hogy BOLYAI JÁNOS egyik írásában [106, 1:221–223] név szerint is felsorolja azokat a matematikusokat, akiknek a párhuzamosokról szóló értekezését ismerte. A nevek között LAMBERT neve nem szerepel. De BOLYAI soha semmit nem tudott meg G. G. SACCHERI (1667–1733) előző vizsgálatairól sem. A párhuzamosok történetére vonatkozó adatait legnagyobbrészt J. J. I. HOFFMANN Kritik der Parallelentheorie, Jena 1807, című munkájából merítette, melyet az 1832. évben János főherceghez intézett folyamodványában is megemlít („*Ez a munka, habár magában véve még elég gyönge, ..., mégis némi előkészítésre szolgálhat ...*" – írja) [106, 1:223, 232]. A könyv megtalálható a Teleki–Bolyai Könyvtárban őrzött Bolyai-könyvhagyatékban [35]. BOLYAI még ismerte BÜRGERnek a párhuzamosok történetével foglalkozó, Heidelbergben 1833-ban, tehát az Appendix megjelenése után kiadott könyvét is [106, 1:223].

Bármennyire elszigetelten dolgozott BOLYAI JÁNOS, akármilyen messze is volt Marosvásárhely a múlt század derekán a jelentős matematikai centrumoktól (Párizs, Göttingen, Berlin, Szentpétervár), ha nem áramlottak, mégis csak szivárogtak ide is hírek a matézis világából. Közvetítőjük apja, BOLYAI FARKAS volt. A kollégium professzora szeretett levelet írni, s ezáltal szoros kapcsolatot tartott fenn ifjúkori barátjával, GAUSSszal, de másokkal is. Természetéből fakadóan csaknem minden iránt érdeklődött. Az újdonságokra felfigyelt, s ha valami érdemesnek vagy érdekesnek látszót talált, azt azonnal tudatta fiával. GAUSS könyveket küldött Farkasnak. Saját munkái közül a Disquisitiones arithmeticae-t s a „nagyon szép" Demonstratio nova-t. Tanácsokat ad Farkasnak, hogy mit szerezzen be (GAUSS javaslatára vásárolja meg BOLYAI FARKAS például a még ma is jó olvasmánynak számító J. E. MONTUCLA (1725–1799) matematikatörténeti

munkáját), felhívja a figyelmét például arra, hogy a komplex számokról megjelent egy dolgozata [101, 112 old.] és egyebekre. GAUSS leveleit nyilvánvalóan János is elolvasta. Sőt a GAUSS által Farkasnak írt fontosabb leveleket magánál tartotta. Ezt támasztja alá Farkasnak 1855. április 8-án Jánoshoz írt levele: „... szeretném ha GAUSS levelét elküldenéd: azonnal visszaküldöm, csak valamit nézek meg benne..." [12, K 22/84].

Apja értesíti Jánost, hogy a Jablonowski-társaság pályázatot hirdetett meg, ő juttatja el később fiához LOBACSEVSZKIJ munkáját, s biztatja különböző számelméleti és az analízis körébe tartozó probléma megoldására.

Néha előfordult az is, hogy GAUSS nem válaszolt Farkas kérdéseire. Sokszor érdeklődött például az „imagináriusok teoriájának" részletes kifejtéséről, de barátja az 1835. ápr. 20-i levél után erről a témáról többet nem írt (l. V. fejezet). Hasonlóképpen válasz nélkül maradtak BOLYAI FARKASnak azok a többször megismételt kérdései, amelyekben SOPHIE GERMAIN (1776–1831) felől érdeklődött [101, 96 és 101 old.], pedig egy 1808-ban írt levélben még GAUSS kérdezte meg őt, hogy hallott-e a francia matematikusnőről [101, 93 old.].

BOLYAI FARKAS még GAUSSnak is tud újat mondani. Két figyelemre méltó példa: „Csak néhány héttel ezelőtt olvastam – írja 1848. január 18-án [101, 128–131 old.] – egy kis magyarhoni munkában, hogy megjelent MÜLLER Archiv der Mathematik-ja I. kötetének 4. füzetében... Addig nem hallottam MÜLLER Archivjáról, ... , tegnapelőtt írtam Kolozsvárra, hátha valakitől megkapnám." Így tudja meg 1847-ben egy marosvásárhelyi tanár, hogy megjelent a matematikatörténet egyik fontos és később sokat idézett folyóirata. Ami meglepő, hogy BOLYAI FARKAS levelének olvasása előtt GAUSS sem ismerte a lapot. Válaszában [101, 134 old.] ui. megjegyzi, hogy miután érdeklődött a lap felől, megtudta, hogy azt nem MÜLLER, hanem JOHANN AUGUST GRUNERT (1797–1872) szerkeszti, de bevallja, hogy még ő sem látta egyetlen példányát sem. (Kolozsváron az Akadémia könyvtárában ma is megtalálható az Archiv der Mathematik und Physik I. kötetének 4. füzete. Ebben egy G. W. MÜLLER nevű hannoveri matematikus ír a komplex számokról a 397–400 oldalokon. Innen származik a félreértés, amit még a [20, 311 old.]-án is olvashatunk.) Az Archiv hosszú időn át (1920-ban szűnt meg) igen jó hírnévnek örvendett, és számos fontos matematikai eredményt közölt először. A múlt század közepétől kezdve egyre gyakrabban találkozunk magyar matematikusok nevével a Grunert-féle Archiv hasábjain [110, 209 old.]. Amint már láttuk (2.1.§), a BOLYAIak neve is ebben a folyóiratban jelenik meg világnyelven először.

A második példánk, amelyre SZÉNÁSSY BARNA mutatott rá [111, 140 old.], a végtelen sorok ún. Olivier-konvergenciakritériumához kapcsolódik. BOLYAI

FARKAS az előbb említett levelében erről is érdeklődik GAUSStól. BOLYAIt valamelyik Bécsben tanuló volt diákja tájékoztatta a kritériumról. Mivel neki semmiképpen sem sikerült annak elégséges voltát igazolnia, GAUSS véleményét kérte. GAUSS válaszában [101, 133–134 old.] bevallja, hogy addig nem hallott a kritériumról, tehát BOLYAI számára is újdonságot közölt.

Marosvásárhelyen 1802 óta működik a magyar nyelvterület első közkönyvtára, a TELEKI SÁMUEL (1739–1822) által alapított könyvesház, a Téka. Ez a remek gyűjtemény a Bolyaiak kedvelt szellemi műhelye volt. Farkas és János is gyakori látogatói voltak a Tékának, ahol BOLYAI FARKAS szerint, „kedvesen lehet elálmodni az alig kiálható kedvetlen életet" [17, 402 old.]. Igaz, hogy a Téka nem szakkönyvtár, de Teleki ifjúkorában érdeklődött a matematika iránt is s így „... természetes könyvtára matematikai részlegének gazdagsága is. A kísérleti természettudomány nagy képviselőinek – GALILEI, BACON – munkái mellett a könyvtáralapító igyekszik megszerezni a történeti és kortárs matematika alapműveit. LEIBNIZ 11, NEWTON 8 munkával szerepel a nyomtatott katalógusban. De jelen vannak a korszak nagy matematikusai, a BERNOULLIak, EULER, MAUPERTUIS, D'ALEMBERT, LAGRANGE, CLAIRAUT. Megvan a tudós francia mérnök, BÉLIDORÉ matematikai munkája, BIONnak, a matematikai eszközök mérnökének gyakorlati könyve, L'HOSPITAL márki, a francia akadémia tiszteleti tagja differenciálszámítással foglalkozó művének első, 1696-os kiadása. CHRISTIAN WOLFF a leibnitzi tanok népszerűsítője több művel is szerepel." [36, 210 old.]. A Bolyaiak a Tékában matematikai értekezéseket tartalmazó folyóiratokat is forgattak. Olvasták a Pétervári Aktákat (EULER dolgozataival), a Göttingische Gelehrte Anzeigen-t (GAUSS írásaival). Gazdag az állomány csillagászati, fizikai és vegyészeti részlege is. Tudunk arról, hogy a könyvtáralapító TELEKI SÁMUEL több levelet váltott a kor neves matematikusaival, a BERNOULLIakkal, CLAIRAUT-val, LAGRANGE-zsal. Feltételezhetjük – bár ennek nincs nyoma –, hogy ezeket a leveleket is kikölcsönözhette olvasásra a két BOLYAI.

BOLYAI JÁNOS számára tehát igen fontos forrásnak számított az apjával tartott szoros tudományos kapcsolat és a Teleki Téka polcain található művek olvasása. De sokat merített apja és a saját maga gyűjtötte matematikai könyvekből. Az akkori viszonyokhoz képest mindkettőjüknek gazdag könyvtára volt. A könyvekről DEÉ NAGY ANIKÓ [35] és FRÁTER JÁNOSNÉ [45] készített kitűnő, részletes összeállítást. A leírásokból megtudhatjuk, hogy a Teleki–Bolyai Könyvtárban őrzött Bolyai-könyvhagyaték 116 (korántsem teljes) munkát tartalmaz, hogy BOLYAI FARKAS 1856. augusztus 26-án kelt végrendeletében „... nem csak egy s más nyomtatott munkáimat, hanem egész könyvtáromat az oskola könyvtárába ezennel által is adom ..." szavaival könyveit a Református Kollégiumnak hagyományozta. A BOLYAI FARKAS autográf könyvjegyzékén 77 munka szerepel, amihez

még János 9 művet csatolt. KONCZ JÓZSEF (1829–1906) a könyvtár egykori őre említi, hogy BOLYAI FARKAS 145 művet adományozott az iskolának. A két számadatban valószínűleg azért van különbség, mert BOLYAI FARKAS könyvei nagy részét már életében elhelyezte a könyvtárban.

BOLYAI FARKAS könyvtárának jellemző vonása az alkotó tudós kézikönyvtári és az aktív pedagógus gyakorlati segédkönyvtári jellege. Könyvtárában korának legkiemelkedőbb és a legújabb kutatási eredményeket tartalmazó tudományos műveket találjuk (EULER, BERNOULLI, MONTUCLA, GAUSS, Journal der Physik stb.) olyanokat, melyeket akkor Magyarországon csak a természettudományokat pártoló főurak engedhettek meg maguknak összegyűjteni. Könyvei megválogatásához nemegyszer GAUSS tanácsát is kikérte. Olyan szerzők műveiből készítette fel tanítványait, amilyen könyveket akkor a nyugati országok egyetemein és főiskoláin, illetőleg akadémiáin használtak. BOLYAI FARKAS könyvtárának egész jellegéről az állapítható meg, hogy egy tudós – matematikus tanár sok szeretettel és tekintélyes anyagi áldozattal összegyűjtött könyvtára a maga idejében eléggé jelentős volt [45].

BOLYAI FARKAS könyvei természetesen fia, János rendelkezésére állottak. És János olvasta is ezeket. Farkas már a 13 éves fiával megismerteti EUKLIDÉSZ, EULER, VEGA, HAUSER műveit; a Bécsben tanuló diáknak könyveket ajánl: „Olvasd KARTENSt, KÄSTNERt, PASQUICHot, EULERt, LACROIX Traité Élémentaire du Calcul differentiel et intégral, LA GRANGE Théorie des Fonctions etc." – írja Jánosnak 1818. szeptember 10-én [12, K 22/75].

Ha BOLYAI JÁNOS kutatásaihoz Bécsben nem is kaphatott közvetlen segítséget, de a mérnökakadémia tanrendje mindenképpen hozzájárult matematikai kultúrájának bővüléséhez. Amint ÁCS TIBOR rámutat frissen megjelent [3] könyvében, Jánosra bécsi tanulmányai során különösen a magasabb geometria, a matematikai földrajz és a mechanikai tudományok voltak jó hatással. A mértant és matematikai földrajzot a kitűnő MICHAEL LENKER, a mechanikai és fizikai tantárgyakat pedig a nagy tudású ALEXANDER BRASSEUR oktatta. A tanárok jó módszereket alkalmaztak. Az V. osztályban megkövetelték a tantárgyak tankönyvből való elsajátítását s a megtanult ismereteknek saját kifejezésekkel, eljárásokkal való előadását. Jánosnak a felső geometria témaköréből egy dolgozatot is kellett készítenie az akadémián.

Talán mégsem volt olyan szegényes és vázlatos BOLYAI JÁNOS szakirodalmi tájékozottsága, amint azt eddig olvashattuk. Igaz, a nemzetközi matematikai kutatás perifériáján dolgozott, de lehetőségeihez képest sokat olvasott, a könyveket pedig, amelyek keze ügyébe kerültek, rendkívüli figyelemmel és igen kritikus szemmel vizsgálta. Az eddig kiadatlan dokumentumok tanulmányozása alapján

csak megerősíthetjük ezt az állítást. Jegyzeteiben állandóan hivatkozik olvasmányaira s ahol okot talál rá, sohasem mulasztja el bíráló megjegyzéseit. Írásaiban sok helyen megtaláljuk LACROIX, LAGRANGE, LEGENDRE, LAPLACE, BRASSEUR, NEWTON, CAUCHY, BOLYAI FARKAS, LITTROW, MASCHERONI, VEGA, RUFFINI, EULER, MONTUCLA, MAKÓ PÁL nevét, de tud POISSON, POINSOT, JACOBI matematikai munkáiról is. Egy helyen (752/1) megjegyzi: „*A nyitanban* {a matematikában} *a tannak hősei* EUKLID, ARCHIMEDES, NEWTON, LEIBNIZ, LAGRANGE, EULER, GAUSS, BOLYAI FARKAS, *hogy más érdemes és részint sokérdemű egyének nevét elhallgassam*".

A legtöbbször GAUSS és ETTINGSHAUSEN nevével (aki „*a már kész Appendix becsét sem volt képes fölismerni*") találkozunk. János a Disquisitiones arithmeticae, Demonstratio nova számos fejezetéhez fűz megjegyzést, ETTINGSHAUSEN s mások könyveiben is több hibát felfedez.

Idézzük BOLYAI JÁNOS néhány bíráló megjegyzését! (Itt nem foglalkozunk BOLYAInak a LOBACSEVSZKIJ Geometrische Untersuchungen ... című munkáját bíráló észrevételeivel. Ezek már régóta ismertek [105], és különböző szerzők azóta is sokszor elemezték.) A legalaposabban a Disquisitionest tanulmányozta, minden paragrafusát ismerte. Saját példányának margójára több észrevételét feljegyzi, a könyvet sokat idézi. A közönséges törtek tizedes törtté való átalakításával (Disq. ar. 317.§) kapcsolatban a GAUSS által bemutatott példához a következő megjegyzést fűzi: „*Ez érdekes és figyelemreméltó tárgyban az egyébaránt Nagy, Mély és Éles* GAUSS *számtani vizsgái 551 lapján koránt sem elég illő szigorral, alaposan, fénnyel s igen könnyűszerüleg s könnyelmüleg s hirtelenkedve járt el, csak határozatlanul s bizonytalanul állítván azt, hogy a csak bizonyos helytől számított részletes vagy némileg közelítő öszveg az igaznál az utolsó helyen < nek jöhet ki*" (335/2). Az algebrai egyenletek megoldása során GAUSS és saját gondolatait összehasonlítva így ír: „... *a* GAUSS *elvei vagy nézetjei is mások vagy különböznek az enyimektől, ezek sokkal egyszerübb, rövidebb, könnyebb, világosabb, tisztább, söbösöbb* {sebesebb} *úton vivén célhoz*" (703/8).

A. ETTINGSHAUSEN 1827-ben Bécsben kiadott Vorlesungen über die höhere Mathematik című kétkötetes könyvében (amely szintén megvolt János saját könyvtárában [35, 20 old.]) is több javítanivalót talál BOLYAI. A VI. fejezetben részletesebben szólunk majd ETTINGSHAUSEN egyik nagyobb tévedéséről, most BOLYAInak az integrálszámítással kapcsolatos észrevételét jegyezzük le: „... *miről azonban a sok érdemű* ETTINGSHAUSEN *az 343-lapon nem is álmodik, ... , mert éppen egyenesen, nyíltan lehetetlent állít.*" (1243/1). Vagy: „ETTINGSHAUSEN *több sok egyéb között vastagot hibázik, ...*" (1362/1).

Hiába nevezi LAGRANGE-t a tan hősének, csipős megjegyzésétől őt sem kíméli: „*A* LAGRANGE *korlátok ... merőben használhatatlanok lévén ...*" (601/1).

BOLYAI JÁNOSt tehát nem vádolhatjuk meg azzal, hogy „rendkívül kötekedő hangon" (V. F. KAGAN [17, 158 old.]) elemezte LOBACSEVSZKIJ dolgozatát. Ő nem csupán „vetélytársát", de minden más matematikust megbírált, ha munkájában tévedést vagy pontatlanságot fedezett fel. Tudjuk, hogy magával szemben is mindig szigorú és igényes volt.

A kéziratos hagyaték számos oldalán, néhány helyen csak úgy odafirkálva, máshol hosszabb szövegbe ágyazva szemünk elé bukkan CRELLE neve (478/77, 742/3, 1199/1^v, 1269/1^v, 1301/17^v). Hitetlenkedve fedezzük fel, hogy BOLYAI ismerte az A. L. CRELLE (1780–1855) által szerkesztett nevezetes matematikai folyóiratot. A Téka polcain hiába keressük a lapot. Mikor és hogyan jutott BOLYAI JÁNOS a Crelle-Journal számaihoz? Tudjuk, hogy apjától eltekintve egyetlen olyan tudóstársa sem volt, akivel gondolatait kicserélhette volna. Mégis akadtak a környezetében művelt emberek is, akiket tisztelt. Már készen volt az Appendix, amikor Olmützben EMANUEL ZITTA (1786–?) őrnaggyal – *„egyik legderekabb, legjelesebb egyén*" – találkozott, ki ott parancsnoka lett. (Előzőleg Aradon is szolgáltak együtt.) Nos *„a derék* ZITTA" – ahogy BOLYAI később önéletrajzában emlegeti – matematikailag is képzett volt, akitől BOLYAI folyóiratot is kölcsönzött. *„A Crelle Journal der Mathematik und Physikből* – írja apjának 1855. január 20-án – *vagy két Heftet Zitta akkori őrnagy, most altábornagytól darab ideig bírhatván sok jót találtam benne, bár...* " (742/1-2^v). Ez az 1832–33-as időszakaszban lehetett, mert BOLYAI JÁNOS 1832. április 27-től 1833. június 15-ig volt a morvaországi főhadparancsnokság olmützi helyi erődítési igazgatóság beosztott mérnökkari másodszázadosa. Kíséreljük meg kifürkészni, vajon melyik füzeteket „bírhatta" BOLYAI az 1826-ban létesített folyóirat számaiból. Jegyzetei között két olyan oldalon is említi a Crelle-t, amelyeken a racionális törtfüggvények elemi résztörtekre való felbontásáról ír. *„Mint a tárgyhoz tartozó* – írja egyik helyen – *a géber* {algebrai} *egy változójú toronyok* {törtek} *apróbb toronyokra szaggatása vagy hasogatása lehetsége bizonyját és módja megadását kiveszem a Crelle Journáljából, mely az általam eddig másutt látottak között legegyszerübb és csinosabb...* " (1269/1^v). Egy másik lapon: *„Lásd a Crelle-ét is a Journal der Mathematik und Physik von Crelle in Berlin, mely is úgy emlékszem egyszerű*" (1199/1^v). Végiglapozva a folyóirat 1826 és 1833 között megjelent köteteit, két olyan számot találunk (az 1832/3 és az 1833/1 füzetet), amelyekben a résztörtekre való bontásról éppen a folyóirat kiadója A. L. CRELLE értekezik. Egy igen apró, valahonnan kivágott és szabálytalan négyszög alakú, néhány szavas cédulán (332/5) ismételten felvillan a Crelle's Journal címe. A papírlap egyik sarkában eldugva a *„Richelot de resol. alg.* $x^{257} = 1$" csonka mondat tűnik elő. Nos, amint tudjuk, a folyóirat 9. kötete 1832/1, 2, 3, 4 füzeteiben közölte RICHELOT a szabályos 257-szög szerkesztését. Valószínű tehát, hogy az említett

füzetek közül valamelyik kettőt adhatta kölcsön „*darab ideig*" ZITTA őrnagy BOLYAInak. BOLYAI ZITTÁval a Tér tudományát is szerette volna megismertetni, de amint parancsnokának egyik nyilatkozatából olvashatjuk, következtetéseit az nem tudta elfogadni.

A másik „*derék nyitanász*", akihez bizalma volt BOLYAI JÁNOSnak, WOLTER VON ECKWEHR százados, akiről már szóltunk (1.2.§).

BOLYAI JÁNOS mindkét följebbvalóját őszintén tisztelte. Évtizedek múlva sem feledkezett meg róluk. Ezt tanúsítja a fent idézett levél, de hogy mennyire bízott bennük később is, azt egy 1851. nov. 24-én kelt jegyzetéből olvashatjuk ki, amelyen fontos teendői között megemlíti, hogy „*János Főherceg, Wolter- és Zittának írni s Heil-Lehre- met* {Üdv-Tanomat} *megküldeni*" (474/1).

A MTA Könyvtára őriz egy érdekes levelet [12, K 23/117] és [95]. Ez a Lembergben szolgáló BOLYAI JÁNOS címére érkezett 1831. november 9-én, és hét nappal korábban WOLTER VON ECKWEHR „Ingenieur Hauptmann" adta postára Grazban. A levelet megilletődve vesszük kézbe, s azt várjuk, hogy abban WOLTER említést tesz a BOLYAI által 1826-ban számára átadott Appendix-ről. Ehelyett az igen udvarias, baráti levélben WOLTER a perspektíváról ír. BOLYAInak valószínűleg vitája támadt valakivel a perspektíva kérdéséről, s ő volt parancsnokát (aki „*... jelesen az űrtani rajzban* {ábrázoló geometria} *éppen különösön jártas egyén ...*") kérte fel bírónak, mert WOLTER így fejezi be eszmefuttatását: „Az ellenfele tévedését Ön egészen helyesen megmutatta".

BOLYAI JÁNOS szerette és becsülte a könyveket. Idősebb korában is szívesen olvasott volna többet. „*Eddig elé* – jegyzi meg 1856-ban – *a legnagyobb szorgalom s képesség mellett sincs mit egyebet tenni ... mint néhány hallomás szerint jobb, általján történetesen kezünkbe került könyvből is némileg okulni. És valóban: nekem nagyon kevés könyvöm van, de azt tapasztaltam s tapasztalhatja aki hasonlólag áll és fenékre hatólag gondolkoztatásra törekszik, hogy szinte a legkisebbiknek annyira fölhasználására sem volt még időm ..., hogy azt már egészen fősnek* {fölöslegesnek} *tartanám...*" (781/5^v).

P. STÄCKEL feltételezi „... hogy valamelyik leggonoszabb fajtájú matematikai dilettáns könyve veszedelmes befolyást gyakorolt Jánosra. Hagyatékában ugyanis megvan a következő mű: A. VOGEL, Mathematiker in Leipzig, Entdeckung einer numerischen Auflösung aller höheren endlichen Gleichungen von jeder beliebigen algebraischen und transzendenten Form, Leipzig, 1845" [106, 1:255]. Ez a könyv ma is megtalálható a Teleki-könyvtárban. Valóban egy műkedvelő szerző munkája. STÄCKEL úgy gondolja, hogy BOLYAI ennek hatására próbálkozott a magasabb fokú algebrai egyenletek megoldásával. Nem érthetünk egyet STÄCKEL véleményével, mert VOGEL könyvét 1845-ben adták ki, ő pedig,

amint láttuk és látni fogjuk, már 1837-ben fordította „*különös figyelmét e tárgyra*". De az sem állja meg a helyét, miszerint ez a „munka" rossz hatással lett volna BOLYAI JÁNOSra. Ő valóban olvasta ezt a könyvet, de hamar megállapította, hogy értéktelen. Az egyenletek közelítő megoldásáról írva cseppet sem elnéző a „szerzővel" szemben: „*Számi vagy közelítő megfejtése bármely véges vagy végetlen egyenletnek egy még 1823-bani eszmém szerént, mely némileg a Lipcsei nyi(tan)ász* VOGEL *munkájában is alaptalanul, handázva, felületesen, külszinűleg előfordul*" (1466/2^{v}). A rossz könyvek nem ártottak BOLYAI JÁNOSnak. Elszomorító olvasni a panaszát, miután arra emlékezik, hogy ZITTÁtól kölcsönkapta a Crelle-féle folyóiratot. Így fakad ki BOLYAI: „... *bár volna még itt olyasmi Grunert ... de e Kräh-Winkel város* {kisváros} *és országban elég egy pár ájtatos imádságos könyv ...* " (742/1-2^{v}). Tudott tehát arról, hogy a nagyvilágban léteznek matematikai folyóiratok, könyvek, amelyekhez leginkább anyagi okok miatt nem sikerült hozzájutnia. BOLYAI 1851-ben fontos feladatai között említi: „*Némi vagy holmi érdekes vagy nevezetes könyvököt melyek kijötte vagy megjelenése felől tudomásom van vagy értesültem, csak belátás vagy megnézegetés végett megszerezni.*" Szeretné megrendelni GAUSS s LOBACSEVSZKIJ minden művét, de az ETTINGSHAUSENét is. Írni akar Kazánba, ismét említi GRUNERT folyóiratát mint amelyre szüksége van. Külön feladat „*Atyáméinak is apróra átnézete*" (474/1). Jó lenne olvasni még növénytan, állattan, nyelvtan és kristálytannal foglalkozó könyveket is – írja.

Amikor édesapja halála után a kollégium elöljárósága az elhunyt végakaratára hivatkozva arra kéri, hogy a szállásán maradt könyveket is adja át a könyvtárosnak, BOLYAI JÁNOS kijelenti: „*nem vonakodom az itt hátramaradott könyvököt ... a Fő – Tanoda Könyvtárába beadni...*", de feltételül szabja, hogy mindazt a bevételt, amit apja munkái eladásából nyer a kollégium, köteles matematikai munkák beszerzésére fordítani, mert „... *üdvözebb célra az így befolyó pénz nem fordíthatik...*" Mindjárt összeállít egy jegyzéket a beszerzendő könyvekről. Ezt írja: „*közelebbről megszerezni kívánatosnak tartanám a következőket:*

LAGRANGE*tól Toldalék az Euler algebrájához 3-dik...* {kézirat szakadt}.

LEGENDRE*: Théorie des nombres s új bővebb életrajzot,* SARTORIUS*nak* GAUSS *érdemeiről tartott...* {nem olvasható} GRUNERT*'s Archiv der reinen und angewandten Mathematik*

Crelle's Journal der reinen und angewandten Mathematik

EULER*'s Institutionis Calcule Integrales*

BURJA*'s selbstlernender Algebraist*

Az OHM, POISSON, POINSOT, CAUCHY, JACOBI *matematikai munkáját, valamint* LOBACSEVSZKIJ*éit is, Kazáni tanár, az itt már meglévő a parallelákat tár-*

gyalón kívül, melyek német vagy latin vagy franciául kijöttek vagy oroszból leforditódtak.

A magyar s bécsi tanos akadémiák matematikai és nyelvtani munkái.

LAPLACE *Mécanique céleste, ha nem is nélkülözhetetlen de illő ide*" (779/1-2) és [6, 95–96 old.].

3.2. Az alkotás örömei és gyötrelmei

BOLYAI JÁNOS is, mint minden matematikus, csak megfeszített munka árán dolgozta ki geometriai rendszerét és egyéb felfedezéseit. Megismerte az alkotás gyötrelmeit, de része volt az igazság megtalálásának örömében is „... *alig merem még ki is mondani működésem és kísérleteim sikeres voltát...*" jelenti ki (547/1). Sokszor csak a kudarcok és a különböző buktatók legyőzésén át jut el eredményei felismeréséhez. „*Sokkal szerényebb, mérsékeltebb vagyok ugyan is sokkal jobban tudom s elevenebben és hívebben érzem és szemem előtt tartom azt, hogy véges lény, kivált ember csalódhatik és hibázhatik...*" (547/1). Vívódásait tükrözik a következő mondatok is: ... „ *első tekintetre úgy tetszhetnék, látszhatnék, hogy mind ezáltal még csak egy lépést sem haladtunk a cél felé, vagyis egy hajszálnyit sem nyertünk. Azonban a dolog erét, kulcsát valószínüleg megkaptuk, s ennek folytában megkisértem a sikamlós kígyót nyakon csípni és fejét megtörni*" (547/9).

BOLYAI elismeri, ha nem tud megbirkózni egy feladattal, de néha a túlzott önbizalom sem hiányzik az írásaiból. „*még nem vagyok abban az állapotban* – vallja be –, *hogy a fenti ötödfokú egyenletet megoldjam* ..." (1446/13^v).

Ötletei időnként „... *torrens* {zuhatag} *módjára omolván* ..." (800/1^v) rohanják meg, máskor néhány perc alatt gondolja ki azokat. Amikor apjával közli a Fermat-tételre készített szép bizonyításait, a következő szavakkal vezeti be a levelét: „*még akkor este (néhány perc alatt) kigondolt egy pár ... remélem nem inelegánsnak találandó s megkedvelendő okadatot* {bizonyítást}... *több hitel nyerésre közölni...*" (800/3). Ugyanakkor BOLYAI FARKASnak szól az a levél (1855. január 22.), amelyben apjának arra a megjegyzésére, hogy csak sok gondolkozással ment valamire, így válaszolt: „*Azt én is írhatom, hogy bár is elég söbösön lobbannak, villámlanak a legszebb s mélyebb tani eszmék (melyek, mint quasi részetlenek, csak egyszerre is születhetnek) úgy, hogy többnyire alig győzöm, csak a feledés elleni megóvásra is, egy másra írni – de a végső kidolgozás több időt kiván*" [17, 411 old.]. A kitaposott „*ország-úton*" elérhető vagy már ismert dolgokkal való foglalkozást unalmasnak tartja s a legnagyobb tekintélyek

véleményét sem fogadja el egykönnyen: „... *a figyelemre méltó igazság kutatásában éppen magam sem szoktam sem az ország-úthoz kötni magamat, sem bármekkora tekintély s nehézség által elijesztetni* ..." (1323/1). Kutatási tárgyának megválasztásakor igényes: „... *én pedig különösön szeretem oly tani tárgyakat választani áthatás végett, melyek valóban szükségesek, bár hasznosak, legalább jó ízlésüök* ..." (1323/1^v). S ha valamibe belefog azt minden részletében megvizsgálja: „*Ahol pedig járni méltónak találok: ott minden szögletet szeretek eljárni*" (1323/2).

Vele is előfordult, hogy nyugtalan éjszakáin továbbgyűrűztek agyában a nappal felmerült gondolatok. „*Egy elmélet ötlött egy éjjel számos álmatlan óráimban elmémbe* – írja BOLYAI – *mit még akkor megpróbáltam volna minden írás nélkül eldönteni, azonban sok álmatlanságom után kevés erőmet kimélni kívánván s nem akarván elme-feszítés által még inkább elűzni az álmot (ami mindamellett nem sikerült) elhatároztam a vizsgát végre vinni*" (440/21^v).

Nem lehet kiolvasni a kusza írásokból, hogy mivel kapcsolatos az a gondolat, amely ugyancsak éjszaka lepte meg, de nagy örömet szerezhetett BOLYAI JÁNOSnak, mert így ír: „*éjfél után egy óra tájban vala azon szerencsés és boldog idő az 1854-i év augusztus hónap 29.-éről 30.-ára virradó éjjel. Reggel sarkallva, keményen utána állva* ... *többé ki sem eresztve* ..." (1263/5).

Tőle tudjuk, hogy az Appendix talán legfontosabb összefüggését is 1823-ban egy téli éjszakán éjfél tájban sikerült igazolnia: „... *éppen télben, éjfél tájban rontván át* ..."

Domáldon írta egyik jegyzetének bevezetőjében: „*E munka írása 1841. február 2-án kezdődött s a róla való gondolás, reákészülés s elszánás az előtti éjjel*" (759/1).

Az elmondottaknak természetesen semmi közük sincs a regényíró fantáziájához, aki elképzelése szerint BOLYAI JÁNOS „három éjjel és három napon át dolgozik szemlehunyás nélkül az Appendix számsorain. Aztán Arad sáncai között botorkál ..." Az ilyen „regényes életrajz" mendemondáiból csupán a szépirodalmi termésből érdeklődő közönségünk nem ismerheti meg a Bolyaiak alakját. Csak a lényegtelent vagy a hamis legendákat. A tényektől eltérő képalkotás sajnos már elég mélyen befészkelte magát a közvéleménybe.

BOLYAI JÁNOS egész életében megfeszített energiával dolgozott, munkájába teljesen belemerült. Nyugtalanította, ha tudományos problémáin való vívódásaiban megzavarták. Erre pedig még az ő magányos életében is többször sor került. „*S mi rengeteg kár, hogy a legjobb, szentebb munka közben annyi ezer, figyelmet félre vonó s kisérő körülmény jő szünetlen közbe! S kivált egy női hang, vagy öltöny-suhogás a feszült, elmélyedt elmét legszentebb, Istenibb dolgokkal foglalkozó búvárkodást megzavarja, gyakran a fölszínre kívánja, ragadja* ..." (1510/1).

3.3. Morzsák

Ebben a rövid paragrafusban szeretnénk néhány olyan „morzsát" elszórni, amelyekből megtudjuk, hogy miként vélekedik BOLYAI az írásról, szivarról, borról, színházról „... *azon meggyőződésben vagyok: hogy minden szerző legalább is maga köteles önművét lelkiismeretesen és híven megitélni, bírálni ... Atyámként tán már több az író, mint az olvasó, s szinte már az érdemel emléket ki ugyan képes lévén olvasni és írni is, fontos és nyomós ok nélkül író nem lesz,* ..." (646/7^v).

Ezt a gondolatot BOLYAI FARKAS valóban több alkalommal hangoztatta. Íme néhány példa: „Több író készül, mint olvasó." „Alig tanult meg írni, s író akar lenni." „Az a ritka szerény, aki tudna írni, s nem találván elég okot, nem ír, hogy azalatt jobbat tehessen." [80, 139–140 old.].

„... *De az egész szivar, mint szemét s tán minden pipázás vagy dohányzás és többik vagy portubákolás árt mellnek, szemnek, fognak, idegrendszernek ... s azért jó volna ha nevére sem lenne semmi szükség*" (700/1).

„*Például a boros kancsó nem barátja az egészségnek, józanságnak és rendes életnek, kötelesség teljesítésnek, hivatal folytatásnak* ..." (569/1^v). „... *Farkas is még* $\frac{1}{4}$ *nyi bort ... de nekem már nem kell, nagyon ritkán, valami különös jó bor, kevés* ..." (1344/1^v).

„*Senki több gyönyört, magasabb éldeletet nem talál nálamnál a színházban, operában. De oly testi (bár is nemesebb) gyönyör csak addig méltó, míg nem jut eszünkbe a Föld népe nyomora, terhe, kínja*" (1172/3^v). Az 1845 végén vagy 1846 első felében keletkezett önéletrajzában is nyilatkozik a színház és az opera iránti vonzalmáról: „*Kadetságom alatt ... mikor csak szerét tehettem, a gyönyörű bécsi színházokban pontosan megjelenni el nem mulattam, jelesen az operákban s balettekben; s oly gyönyört leltem azokban: hogy Bécset semmiért sem sajnáltam úgy ott (el-) hagyni: mint azon ritka színházokért*" (1086/2^v, 2).

4

Bolyai János számelméleti vizsgálódásai

4.1. Néhány szó a számelméletről

A számelmélet a matematika egyik legrégibb és legérdekesebb ága. Elsősorban az 1, 2, 3, 4 ... természetes számok tulajdonságait kutatja. Ezek a legközelebbi számismerőseink, egyben a legkiismerhetetlenebbek is. Ezért a számelmélet valóságos tárháza az érdekes, sokszínű, nemegyszer reménytelenül nehéz problémáknak. Bár a számelméleti tételek megfogalmazása igen gyakran rövid és egyszerű, bizonyításuk sokszor hosszadalmas és nehéz. Ismeretes, hogy idők folyamán a számelméletben sok olyan probléma vetődött föl, amely könnyen érthető a nem matematikusok számára is, ugyanakkor a válaszadáshoz sok évre volt szükség, sőt egyesek mindmáig megoldatlanok. Mégis az elmúlt évszázadok folyamán sok kiváló matematikust vonzott az ebben az elméletben található feladatok szépsége és változatossága.

Vajon BOLYAI JÁNOS találkozott-e a számelmélet érdekfeszítő kérdéseivel? S ha találkozott, hogy fogadta azokat? Sikerült neki ebben a tudományágban is új eredményeket felismernie? Az alábbiakban kéziratainak újabb átvizsgálása nyomán talált följegyzései alapján válaszolunk ezekre a kérdésekre.

4.2. Bolyai János és a számelmélet

Az eddig megjelent valamennyi Bolyai-monográfia szerzőjének egybehangzó véleménye szerint az abszolút geometria megalkotója nem vonzódott a számelméleti problémák iránt. A legtöbb könyv írója megemlíti ugyan, hogy kísérletezett

számelméleti feladatok megoldásával is, de sietve közli, hogy ezen a téren nem ért el semmilyen említésre méltó eredményt. Már az első, és mindmáig a legtartalmasabbnak ítélt Bolyai-monográfia szerzője, PAUL STÄCKEL [106] könyvében több helyen beszámol arról, hogy BOLYAI JÁNOSt számelméleti feladatok is foglalkoztatták. *Megírja, hogy ezekre apja, BOLYAI FARKAS buzdította őt már fiatal* éveiben, de aztán hozzáteszi: „Előrehaladott korában is foglalkozott számelmélettel, de kevés sikerrel úgy, hogy a tárgyra vonatkozó följegyzéseivel nem érdemes behatóbban foglalkoznunk" [106, 1:175]. A méltán nagy tekintélyű Stäckel-munka a későbbi szerzőkre is nagy hatással volt, s állításait anélkül, hogy ellenőrizték volna azokat, minden kételkedés nélkül elfogadták. ALEXITS GYÖRGY, aki elismeri, hogy [1] könyve írásakor a marosvásárhelyi kéziratokat nem ismerte, így ír: „János ... foglalkozott számelméleti kérdésekkel is, de ezekről csak egy-két érthetetlen jelekkel teleírt cédula és levélboríték adhatna felvilágosítást, ha ki lehetne hámozni az odavetett jelek értelmét. De nem valószínű, hogy számelméleti kísérletei valamilyen értékes eredményt tartalmaznának, ..." [1, 149 old.]. SZÉNÁSSY BARNA így vélekedik: „A két BOLYAI néhány írásából tudjuk, hogy nagyra becsülték ugyan a matematikai tudományok »királynőjét«, ennek ellenére hagyatékuk ilyen tárgyú gondolatokat alig tartalmaz" [110, 244 old.]. A [19, 35 old.] cikkében pedig azt olvashatjuk, hogy a számelmélet „... nem tudta a hátramaradt iratok tanúsága szerint különösebben lekötni a két BOLYAI érdeklődését". Egyedül WESZELY TIBOR fogalmaz óvatosan, az igazságot megközelítően, amikor megjegyzi, hogy BOLYAInak a számelmélet terén semmiféle jelentősebb eredményéről nincs tudomásunk. Ez valóban így is volt, amikor WESZELY [127] könyve napvilágot látott.

Ezek után megérthetjük, hogy a közvéleménybe mélyen behatolt az a nézet, amelyet a legfontosabb Bolyai-monográfiák szerzői egyöntetűen kijelentenek: BOLYAI JÁNOS próbálkozott ugyan néhány számelméleti probléma megoldásával, de kutatásai ezen a téren nem voltak eredményesek.

A kéziratok ennek a véleménynek éppen az ellenkezőjéről tanúskodnak. Alapos átvizsgálásuk eredményeképpen megállapíthatjuk, hogy az eddig megjelent monográfiákban hangoztatott állításokat módósítanunk kell, szükséges átértékelnünk, sőt helyreigazítanunk. A kézirathagyaték lapjai, az eddig még feltáratlan több Bolyai-levél arról győznek meg, hogy a fenti véleményekkel ellentétben a geométerként ismert BOLYAI JÁNOS igen élénken érdeklődött a számelméleti kérdések iránt. Őt is megejtették „a matematika királynőjének" nehéz feladatai, és amint látni fogjuk, olyan följegyzéseket is rejtegetnek a kéziratok, amelyeket kibetűzve meglepődve fedezzük fel BOLYAI JÁNOSnak a számelmélettel kapcsolatos eredeti gondolatait, amelyekkel megelőzte más matematikusok később közzétett munkáit.

A számelméleti problémákra, amint erre STÄCKEL is rámutat, valóban apja hívta fel János figyelmét. STÄCKEL szerint Farkas az 1825 után következő években azt szerette volna ezáltal elérni, hogy János ne pazarolja fiatal erejét a parallelákra, hanem térjen át más vizsgálatokra, amelyekkel még nagy sikereket érhet el [106, 1:86]. Véleményünk szerint Farkas nem akarta elvonni János figyelmét a párhuzamosok kérdéséről. Egyszerűen őt is izgatták a számelmélet vonzó feladatai. Tény, hogy apa és fia több olyan levelet váltott, amelyekben számelméleti kérdésekről értekeznek. *Jóllehet a Bolyaiak levelezésének elég nagy részét* ismerjük [6, 11, 17, 20], több számelméleti tárgyú igen értékes levél közzététele még nem történt meg. (Közülük többet könyvünkben fogunk először nyomtatásban megjelentetni). Pedig éppen ezeknek a leveleknek a tartalma árulja el, természetesen más kéziratlapokkal együtt, hogy milyen újszerűen, eredeti módon, másoktól függetlenül közelíti meg BOLYAI JÁNOS a számelméleti feladatokat.

Mielőtt megvizsgálnánk BOLYAI JÁNOSnak a kéziratos hagyatékban eddig „rejtőző" néhány számelméleti eredményét – pótolva az utókor mulasztásának egy részét –, nézzük meg rendre, mindvégig a kéziratokat faggatva, hogy miképpen vélekedett ő a számelméletről, annak nagy alakjáról, GAUSSról és remekművéről, a Disquisitiones arithmeticae-ről. Úgy gondolom, hogy BOLYAInak a különböző kéziratlapokra elvétve följegyzett megnyilatkozásait is érdemes rögzítenünk, mivel azok még sehol sem láttak napvilágot.

BOLYAI JÁNOSt a számelmélet valósággal elbűvölte. Nyilatkozata erről jó példája írásai egyik sajátosságának, hogy sok följegyzésében mint egy bőségszaruból úgy ömlenek a rokon értelmű új szavak: „*A számelméletben nemcsak az egész számok, hanem az egész tan legfontosabb, leghasznosabb, leglényegesebb, legszebb, legérdekesebb, legkecsesebb feladatait találjuk*" (1179/24, 1407/3). Ismert, hogy GAUSS is igen kedvelte a számelméletet. Tőle származik a mondás, hogyha a matematika a tudományok királya, akkor a számelmélet a matematika királynője. BOLYAI bár nagy tisztelője a „*Göttingai Kolosszus*"-nak, őt a számelmélet nagymesterének nevezi, mégsem ért ezzel egyet. „*Gauss igen korán* – állítja – *főleg a számelmélettel foglalkozott. Ez életfogytig kedvenc tárgya maradt, amelyet, habár nem jogosan a matematika királynőjének nevezett*" (938/1^v). Ezt a kijelentését azzal magyarázza, hogy szerinte a matematika minden ága fontos, nem csak a számelmélet.

1801 nyarán látott napvilágot a számelmélet alapvető tankönyve, GAUSS Disquisitiones arithmeticae című munkája. Néha e könyv megjelenésétől számítják a modern számelmélet kezdetét. A „*kolosszális*" Disquisitiones BOLYAI JÁNOS kézikönyve volt, tehát jól ismerte, sokat forgatta. A számelmélet számos tételét ismerte meg ebből a valóban mérföldkövet jelentő könyvből. Ma ez a munka a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárában található ([12], 545.000 jelzet).

A könyvbe BOLYAI JÁNOS a nevén kívül beírta azt is, hogy a könyvet fűzött állapotban 4 Ft 30 krajcárért vásárolta. A könyvben sok helyen megtalálhatók BOLYAI JÁNOS, sajnos ceruzával írt széljegyzetei. Átlapozva GAUSS munkáját tapasztaltam, hogy jó állapotban van, de a latin nyelvű bejegyzések már nagyon halványak, alig lehet kiolvasni. János több helyen a hibajegyzékből másol át néhány szót. Nem tűnnek a szöveget bíráló megjegyzéseknek, inkább azzal a céllal készültek, hogy könnyebbé tegyék a könyv olvasását.

Farkasnak is volt egy példánya GAUSS munkájából a szerző dedikációjával (Amico suo de BOLYAI per curam PAULI VADA, auctor), amelyet aztán ő a Teleki Tékának ajándékozott (A Teleki Thecanak adom néhány egyébbel együtt, BOLYAI FARKAS). GAUSS 1803. június 20-án írja meg BOLYAI FARKASnak, hogy VADAS PÁLTÓL küldi a Disquisitionest, Farkas pedig 1804. március 1-én köszöni meg a küldeményt: „... halhatatlan munkáid már kezemben vannak ..."

Tehát a Disquisitiones arithmeticae kora számelméletének legfontosabb és legújabb problémáival, megjelenése után rövidesen Marosvásárhelyre is eljutott. GAUSS művét BOLYAI JÁNOS már 13 éves kora után olvashatta, ui. ekkor már tudott latinul. Az 1820-as években, miközben az abszolút geometria kidolgozásán fáradozik, jut ideje a Disquisitiones tanulmányozására is. Apja (amint már említettük) 1831. június 20-án GAUSShoz írt levelében [101, 103–104 old.] olvassuk: „Fiam szándéka volt, hogy a Te polygon-elméletedet németül, a kisebb kaliberű elméknek könnyebben hozzáférhető módon adja ki ..." GAUSS polygonelméletét a Disquisitiones arithmeticae-ben fejtette ki. BOLYAI JÁNOS tehát azt tervezte, hogy németre fordítva jelentetné meg átdolgozva, könnyebben érthető módon az akkoriban nehéznek tartott munka egy részét.

Maga GAUSS is tudta, hogy könyve igényes munka. Ebben BOLYAI JÁNOS is egyetértett vele.

GAUSS 1808. szeptember 2-án BOLYAI FARKAShoz írt egyik levelében [101, 93–94 old.] úgy nyilatkozik, hogy a Disquisitiones arithmeticae-t csak hat matematikus értette meg egész Európában: SOPHIE GERMAIN, POULET de L'IOLE, LAGRANGE, BARTELS, egy fiatal matematikus Ostfrieslandból és (valószínű) BOLYAI FARKAS. Ekkor GAUSS még nem sejthette, hogy munkája egyik legjobb értője később, L. DIRICHLET mellett, éppen BOLYAI JÁNOS lesz. Ugyanitt a számelméletről szólva azt mondja GAUSS: „Figyelemre méltó, hogy bárkit, aki komolyan foglalkozik ezzel a tudománnyal, igaz szenvedély kerít hatalmába." Fülünkbe cseng Farkasnak az ifjú Jánoshoz Bécsbe küldött levelének egyik mondata a matematikáról: „hidd el, hogy egy tudomány sincs, amely olyan passióval ragadja azt, akinek reá való talentuma van."

A Disquisitionest BOLYAI JÁNOS sem tartotta könnyű olvasmánynak. Hallgassuk csak őt: „*Az ki az emberi elméknek egyik legremekebb és mélyebb mívén erejét meg akarja próbálni, és magát a netaláni maga – kétség – korságából meggyógyítani, annak ajánlom például a Göttingai Kolosszus* GAUSS*nak Disquisitiones arithmeticae című munkáját*" (845/7^v). Egy másik helyen pedig ezt írja: „*... a készülő prímtannak bármely, tehát a Disquisitiones arithmeticae-nek is bármely theorémáját procerto* {bizonyosan} *megmutathatni, problémáját resolválhatni és így erre nézve, az egész Disquisitiones arithmeticae-t zsebbe tehetni ugyan: noha másfelől, azon ABC-je az ő módjának, sajátságos és sokkal nehezebb volta miatt mind az enyim mellett is, örök – megtartást és nagyra becsülést, respective bámulatot érdemel*" (800/1^v).

4.3. A kis Fermat-tétel

BOLYAI JÁNOS legtöbbet a prímszámokkal vesződött. „*Az egész számtan sőt az egész tan mezején* – vallja – *alig van szebb és érdekesebb ... s a legnagyobb nyiászok* {matematikusok} *figyelme és eleje óta elfoglalt tárgy, mint a főszámok* {prímszámok} *oly mély homályban rejlő titka*" (1199/3^v). Amint láttuk (1.1.§) már gyerekkorában elgondolkozott azon, hogy végtelen sok prímszám létezik-e. Így barátsága a prímszámokkal elég korán kezdődött.

Egy olyan eljárást keresett – mint olyan sokan mások –, amelynek segítségével bármely törzsszám megfelelő képlettel kifejezhető, vagyis egy olyan formulát, amellyel kiszámíthatjuk közvetlenül az n-edik törzsszámot. Egy időben úgy érezte, hogy ezt a szándékot sikerül megvalósítania. Egyik följegyzésén így fogalmaz: „*nagyobbra nőtt, hágott azon régóta táplált sejtelmem és reményem, miszerint a főszámokat hányadikságuk által függetlenül vagy egyenesen, közvetlenül is kitehetem, ..., vagyis egy oly idomot* {képletet} *adni, mely alatti számok mind fők*" (1199/2^v). Ugyanezt a gondolatot olvashatjuk ki apjának írt egyik igen bizakodó hangú leveléből: „*A prímek kirekesztő formulájának is már nincs kételyem, hogy még pedig rövid időn belül sikerülnie kell, még pedig bármi idomúak legyenek ...*" (800/1^v).

Az utolsó mondatban BOLYAI arra utal, hogy ekkor nemcsak a racionális egész prímek, hanem a komplex prímek képletének megtalálásában is reménykedik. Amint az V. fejezetben látni fogjuk, az utóbbi törekvése teljes sikerrel járt.

A racionális egészek körében a prímszámképletet ugyan neki sem, és napjainkig másnak sem sikerült megtalálnia, de BOLYAI JÁNOS vizsgálódásainak során egy fontos felfedezést tett, nevezetesen rábukkant az első ún. pszeudoprímszámra, vagy magyarul álprímszámra.

BOLYAI JÁNOS a prímszámképletet először az ún. kis Fermat-tételben vélte felfedezni (PIERRE FERMAT 1601–1664). Ez a tétel azt mondja ki, hogy ha p egy prímszám, a egy olyan egész szám, amely nem osztható p-vel, akkor $a^{p-1}-1$ különbség osztható p-vel, amit röviden a következőképpen szoktunk írni:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{4.1}$$

Például $2^{12}-1=4095$ osztható 13-mal, $3^{16}-1=43046720$ osztható 17-tel, 1224^6-1 osztható 7-tel, de $2^{11}-1=2047$ nem osztható 12-vel.

A kis Fermat-tétel fordítottja azonban nem érvényes, azaz ha teljesül (4.1), vagyis ha az $a^{p-1}-1$ különbség osztható p-vel, abból nem következik szükségszerűen, hogy p prímszám. M. CIPOLLA bizonyította be [30] még 1904-ben, hogy minden a természetes számhoz végtelen sok olyan n összetett szám tartozik, amelyekre

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}. \tag{4.2}$$

Például $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, bár $341=11\cdot 31$, $2^{560} \equiv 1 \pmod{561}$, bár $561 \equiv 3\cdot$ $\cdot 11\cdot 17$, $2^{161037} \equiv 1 \pmod{161038}$, ahol $161038=2\cdot 73\cdot 1103$ is egy összetett szám. Az olyan összetett n számokat, amelyekre a (4.2) kongruencia $a=2$ esetén teljesül, pszeudoprímeknek, álprímeknek (precízebben a 2-re vonatkozó pszeudoprímeknek) nevezzük. Vannak olyan n összetett számok is, amelyek minden n-hez relatív prím a-ra kielégítik a kis Fermat-tételt. Az ilyen n számokat felfedezőjükről Carmichael-számoknak nevezzük [27]. Ezek szerint 341, 561 álprímek, hasonlóképpen a 645, 1105 és 161038 számok is, ugyanakkor az 561-es szám Carmichael-szám. A matematikusok sokat vizsgálták ezeket a különleges számokat. A számelmélet egyik legújabb eredménye, hogy sikerült bebizonyítani (ERDŐS PÁL (1913–1996) neves magyar matematikus egy 1956-os ötletét felhasználva), hogy Carmichael-számok minden határon túl léteznek [78]. Azt, hogy végtelen sok álprím van, már 1904 óta tudjuk [30]. Az álprímek érdekes *történetében* BOLYAI JÁNOS *is fontos szerepet játszott. Igaz, hogy ez a szerep* mindmáig ismeretlen maradt.

Apja ösztönzésére ($1193/20^v$) megkísérelte bebizonyítani a kis Fermat-tétel fordítottját. Ha a bizonyítás sikerrel jár, akkor ez a tétel szolgáltatta volna a hőn áhított prímszámképletet. Néhány kísérlet után rádöbbent arra, hogy a bizonyítás lehetetlen (982/19), vagyis a kis Fermat-tétel fordítottja általában nem érvényes. Megpróbált „ellenpéldát" keresni. Fáradozását siker koronázta. A prímek képletét ugyan nem sikerült megtalálnia, de rátalált az első álprímszámra, pontosabban több olyan n összetett számra bukkant, amelyekre a (4.2) összefüggés fennáll.

A legkisebb (2-höz viszonyított) pszeudoprím, a 341-es fölfedezéséről így számol be apjának küldött egyik levelében: „*A tegnapelőtt igért* $2^{\frac{p-1}{2}}$ *-re nézve ugyan ezelőtti vizsgáimat* {vizsgálataimat} *hírtelen nem kaphatván elé, vagyis inkább akarván újból gondolkozni rajta, még tegnap tisztába jöttem mire nézve itt rövidségért bővebb tárgyalást mellőzve a fő dolog iránti kétely és nyugtalanság eloszlatására elég már a következőket is közölni: ... mi pedig a legközelebbi és tulajdonképpeni főkérdés, hogy éppen* $2^{\frac{m-1}{2}}$ *is lehet* $\equiv 1 \pmod m$ *bár is* m *nem prím, minek megmutatására persze elég egyetlen példa is, mint a következő melyre ugyan csak történetesen de még sem vaktában, hanem elmélet után mentem:* $2^{340}-1$ *oszlik* $(341=11\cdot 31)$*-gyel mint végtelen könnyen meggyőződhetni abból, hogy* $2^{10}=1024$*, melyet osztva* 341*-gyel marad* 1*; tehát (Disq. Ar.7.§)* $(2^{10})^{17}=2^{170}=2^{\frac{341-1}{2}}$*-nek maradéka is valamint* $2^{341}-1$*-nek is* $=1$*, úgy, hogy sem a* FERMAT *theoréma sem a* $2^{\frac{m-1}{2}}$ *-re nézti szép sejtelem (mely ha a dolog természte szerint valósulhatott volna, egy excelleng és nagyon kényelmes új isme-jele (critériuma) lesz a prímeknek), nem csak, hogy generaliter* {általánosan} *nem, hanem még azon különös esetben sem állnak, ha* $a=2$*...*" (1018/1) (**5. ábra**).

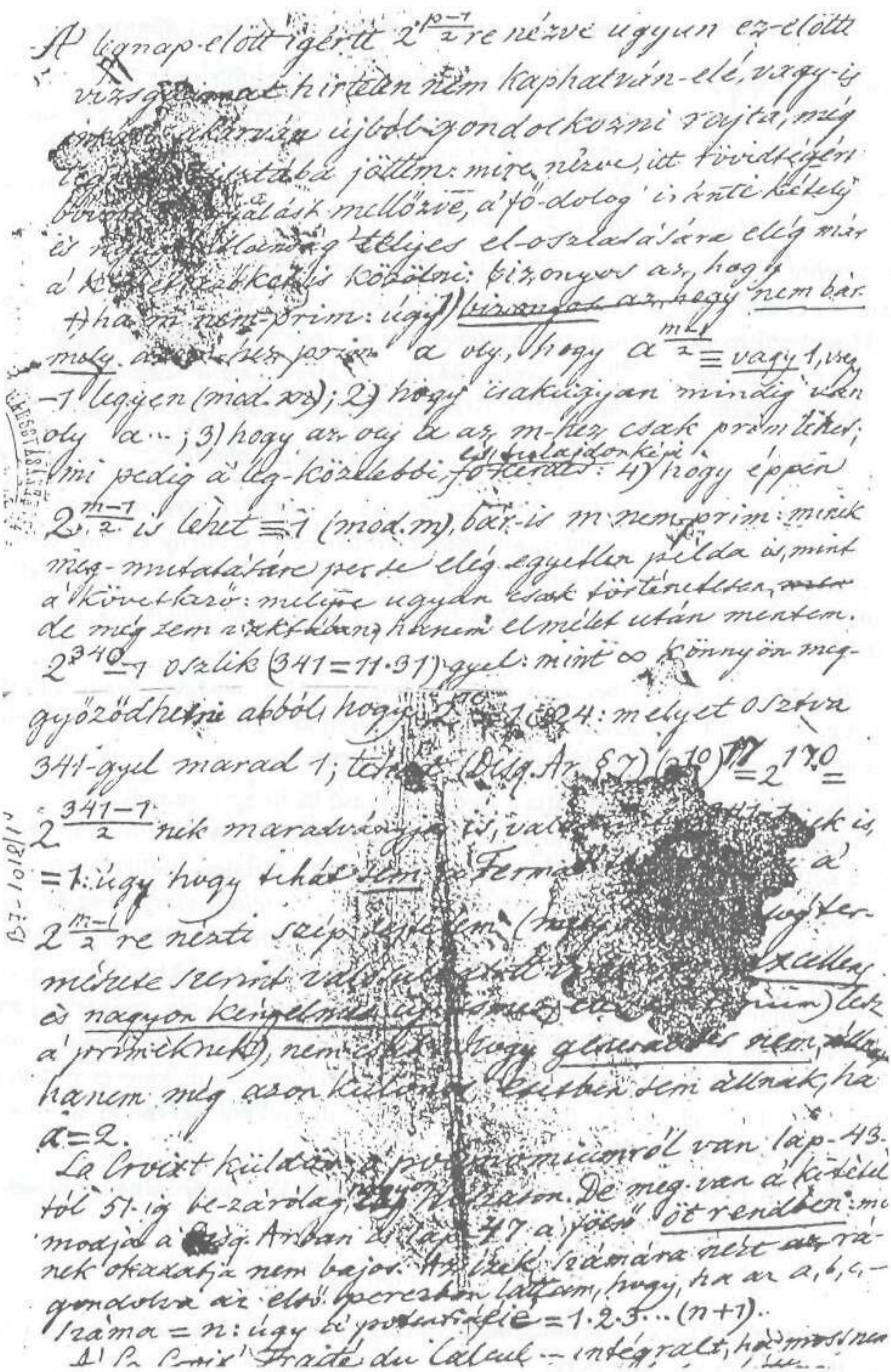
BOLYAI a fenti levélben csak igazolja, hogy a 341-es összetett szám valóban kielégíti a (4.2) kongruenciát. Azt, hogy milyen módon találta meg ezt a számot íratainak más oldalairól ismerhetjük meg (**6. ábra**).

Remélem, hogy megbocsátja a Kedves Olvasó ha itt egy személyes élményemet mesélem el. A hagyaték lapozgatása során először BOLYAI JÁNOS idézett levele került a kezembe. A levél izgalmas matematikai tartalma mellett különösen megragadott a következő két mondatfoszlány: „*... ezelőtti vizsgáimat hirtelen nem kaphatván elé, ...*" és, hogy eredményét „*... nem vaktában, hanem elmélet után ...*" találta. Vajon mi lehet azokban a régebbi jegyzetekben? Léteznek-e még valahol? Búvárkodásom legnagyobb jutalma talán az volt, amikor néhány hét elteltével előkerültek a BOLYAI által „*hirtelen*" nem talált jegyzetek, amelyek a „*vizsgái*"-t titkolták. Ezek a németül írt lapok valódi kincset rejtettek. Kibetűzésükkel felszínre kerültek azok a sorok, amelyekből sikerült kihámozni a levélben említett „*elméletet*".

BOLYAI JÁNOS azt a kérdést vizsgálja (1265/3, 3^v), hogy milyen feltételek mellett teljesül az

$$a^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq} \tag{4.3}$$

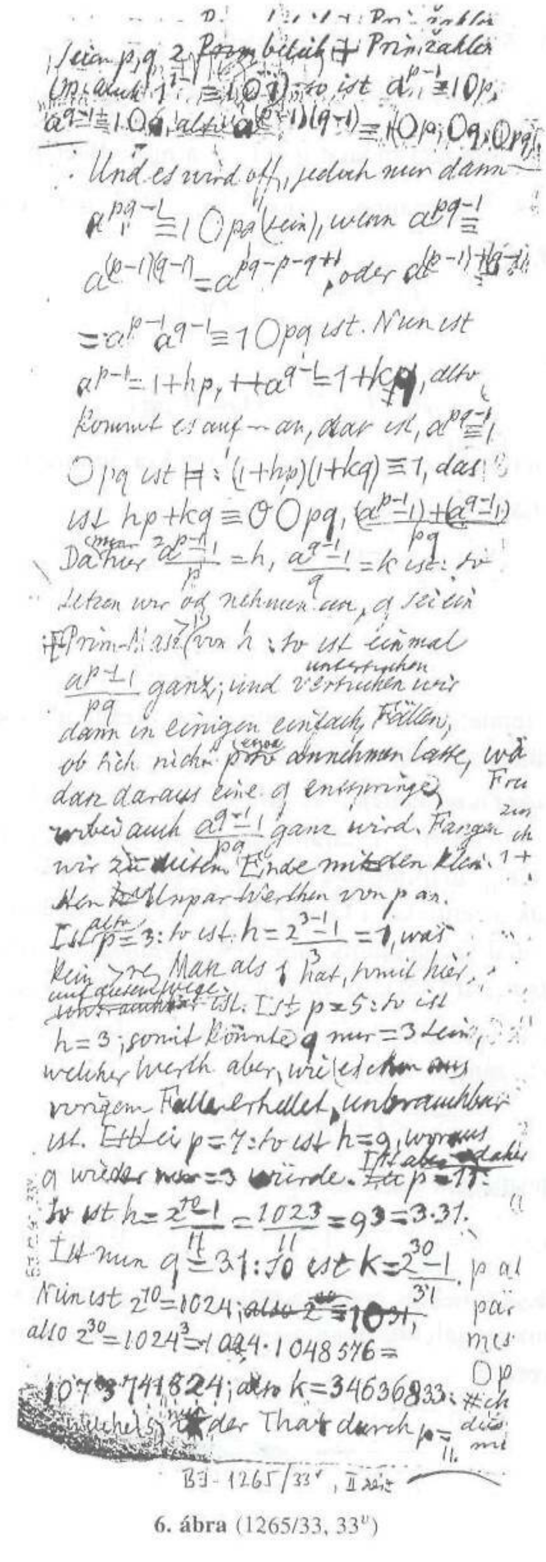
kongruencia, ahol p és q prímszámok, a pedig egy olyan egész szám, amely nem osztható sem p-vel, sem q-val.



A' tegnap előtt igért $2^{\frac{p-1}{2}}$-re nézve ugyan ez előtt vizsgálmat hirtelen nem kaphatván elé, vagy-is [illegible] újból gondolkozni [illegible], még [illegible] jöttem: mire nézve, itt rövidségért [illegible] mellőzve, a' fő-dolog' iránti kétely' és [illegible] teljes el-oszlatására elég már a' következőket közölni: bizonyos az, hogy ha m nem-prim: úgy ~~bizonyos az, hogy~~ nem bár-mely [illegible] a oly, hogy $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv$ vagy 1, vagy −1 legyen (mod. m); 2) hogy csakugyan mindig van oly a [illegible]; 3) hogy az oly a az m-hez csak prim lehet; mi pedig a' leg-közelebbi, fő-tekintet és tulajdonképi: 4) hogy éppen $2^{\frac{m-1}{2}}$ is lehet $\equiv 1$ (mod. m), bár-is m nem-prim: minek meg-mutatására persze elég egyetlen példa is, mint a' következő: melyre ugyan csak történetesen, de még sem vaktában, hanem elmélet után mentem. $2^{340}-1$ oszlik (341=11·31)-gyel: mint ∞ könnyen meg-győződhetni abból, hogy $2^{10}=1024$: melyet osztva 341-gyel marad 1; tehát (Disq. Ar. §7) $(2^{10})^{17} = 2^{170} = 2^{\frac{341-1}{2}}$-nek maradványa is, [illegible]-nek is, =1: úgy hogy tehát sem a' Fermat [illegible] a' $2^{\frac{m-1}{2}}$-re nézt szép [illegible] tétel [illegible] természete szerint [illegible] és nagyon kényelmes [illegible] lesz a' primeknek), nem csak hogy általában nem, hanem még azon különös esetben sem állnak, ha a=2.

La Croix' küldött [illegible] van lap-43-tól 51-ig be-zárólag [illegible] De meg van a' [illegible] ötrendben [illegible] módja a' Disq. Ar.-ban is lap 47 a' [illegible] nek okadatja nem bajos. [illegible] számára [illegible] gondolva az előv. [illegible] láttam, hogy, ha az a, b, c, [illegible] száma = n: úgy az [illegible] = 1·2·3…(n+1). A' La Croix' Traité du Calcul — intégralt, ha most [illegible]

5. ábra (1018/1, 1^v)


Seien p, q 2 Primzahlen ... ist $a^{p-1} \equiv 1 \bigcirc p$,
$a^{q-1} \equiv 1 \bigcirc q$, also $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \bigcirc p, \bigcirc q, \bigcirc pq$.
Und es wird oft, jedoch nur dann
$a^{pq-1} \equiv 1 \bigcirc pq$ (sein), wenn $a^{pq-1} \equiv$
$a^{(p-1)(q-1)} = a^{pq-p-q+1}$, oder $a^{(p-1)+(q-1)}$
$= a^{p-1} a^{q-1} \equiv 1 \bigcirc pq$ ist. Nun ist
$a^{p-1} = 1+hp$, $a^{q-1} = 1+kq$, also
kommt es auf – an, dass ist, $a^{pq-1} \equiv 1$
$\bigcirc pq$ ist: $(1+hp)(1+kq) \equiv 1$, das
ist $hp+kq \equiv 0 \bigcirc pq$, $\frac{(a^{p-1}-1)+(a^{q-1}-1)}{pq}$
Daher $\frac{a^{p-1}-1}{p} = h$, $\frac{a^{q-1}-1}{q} = k$ ist: so
setzen wir pq nehmen an, q sei ein
Prim-Masse von h: so ist einmal
$\frac{a^{p-1}-1}{pq}$ ganz; und untersuchen wir
dann in einigen einfach. Fällen,
ob sich nicht ... annehmen lasse, wo
dass daraus eine q entspringe,
wobei auch $\frac{a^{q-1}-1}{pq}$ ganz wird. Fangen
wir zu diesem Ende mit den klei-
nen Unpar-Werthen von p an.
Ist also $p=3$: so ist $h = \frac{2^{3-1}-1}{3} = 1$, was
kein ... Man als 1 hat, somit hier,
auf diesem Wege, ist. Ist $p=5$: so ist
$h=3$; somit könnte q nur $=3$ sein,
welcher Werth aber, wie (es) schon aus
vorigem Falle erhellet, unbrauchbar
ist. Ist $p=7$: so ist $h=9$, woraus
q wieder nur $=3$ würde. Ist $p=11$:
so ist $h = \frac{2^{10}-1}{11} = \frac{1023}{11} = 93 = 3 \cdot 31$.
Ist nun $q=31$: so ist $k = \frac{2^{30}-1}{31}$.
Nun ist $2^{10} = 1024$;
also $2^{30} = 1024^3 = 1024 \cdot 1048576 =$
1073741824; also $k = 34636833$:
welches in der That durch $p=11$.
BJ-1265/33v, II.

6. ábra (1265/33, 33^{v})

Így okoskodott: A kis Fermat-tétel szerint

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p \quad \text{és} \quad a^{q-1} \equiv 1 \pmod q.$$

Az első kongruencia mindkét oldalát $q-1$-re, a másodikét $p-1$-re emelve az

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod p \quad \text{és} \quad a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod q$$

adódik, amelyekből az

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{pq}$$

következik, vagyis

$$a^{pq-p-q+1} \equiv 1 \pmod{pq},$$

ami tehát a feltételeinket kielégítő p, q, a számokra mindig teljesül.

Most azt mondja BOLYAI, hogy ha az

$$a^{p+q-2} \equiv 1 \pmod{pq},$$

vagyis az

$$a^{p-1} \cdot a^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

kongruencia igaz lenne, akkor ez utóbbi két összefüggés összeszorzása által nyomban megkapnánk a keresett (4.3) kongruenciát.

Tehát most azokat a feltételeket kell megkeresnünk, amelyek ez utóbbi kongruencia helyességét biztosítják. (Feltűnő azonosság van BOLYAI észrevétele és D. H. LEHMER 1936-ban, valamint ERDŐS PÁL 1949-ben felhasznált ötletei között. Ha összehasonlítjuk a fentieket LEHMER [84, 353 old.] és ERDŐS [40, 623 old.] dolgozataival, azonnal szembetűnik, hogy ők ugyanazt a gondolatmenetet követik, amelyet már BOLYAI JÁNOS is alkalmazott vagy 100 évvel ezelőtt.)

Mivel $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ és $a^{q-1} \equiv 1 \pmod q$ – folytatja BOLYAI – léteznek olyan h és k egész számok, hogy

$$a^{p-1} = 1 + hp \quad \text{és} \quad a^{q-1} = 1 + kq,$$

vagyis a (4.3) teljesülésének a feltétele az, hogy

$$hp + kq = (a^{p-1} - 1) + (a^{q-1} - 1) \equiv 0 \pmod{pq} \tag{4.4}$$

legyen. Ha p osztója k-nak, q pedig osztója h-nak, akkor a (4.4) feltétel teljesül. Ez, BOLYAI szerint azt jelenti, hogy a (4.3) összefüggés olyan p és q prímszámokra igaz, amelyekre

$$\frac{a^{p-1} - 1}{pq} \quad \text{és} \quad \frac{a^{q-1} - 1}{pq},$$

vagy

$$(4.5)\qquad \frac{a^{p-1}-1}{q} \quad \text{és} \quad \frac{a^{q-1}-1}{p} \quad \text{egész számok.}$$

Az $a=2$ egyszerű esetben aztán rendre kipróbál néhány, a (4.5)-ös feltételeket kielégítő prímszámot, s így eljut a $p=11$ és $q=31$ számokhoz, vagyis ahhoz az eredményhez, amelyet a levélben is olvashatunk: $2^{340}-1$ osztható $11\cdot 31$-gyel.

Így fedezte fel BOLYAI JÁNOS a legkisebb pszeudoprímszámot. Ha módszerét figyelmesen végigkövetjük, azonnal észrevesszük, hogy az ma egy jól ismert tankönyvi tétel. Ugyanis a (4.5)-ös feltételek $a=2$-re így írhatóak:

$$2^{p-1}\equiv 1\,(mod\ q) \quad és \quad 2^{q-1}\equiv 1\,(mod\ p),$$

vagyis BOLYAI szerint, ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor azokból a

$$2^{pq-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ pq)$$

kongruencia következik. Ez pedig pontosan J. H. JEANS (1877–1946) tétele, amelyet szerzője 1898-ban, évtizedekkel BOLYAI JÁNOS halála után közölt [58].

Természetesen sem JEANS 1898-ban, sem LEHMER 1936-ban, sem pedig ERDŐS 1949-ben nem sejtette, hogy gondolataikat valaki már rég leírta, s azok Marosvásárhelyen a Teleki Tékában szunnyadnak.

A matematikai tételek jelentős része, egyes matematikatörténészek szerint legalább a fele, nem az igazi fölfedező nevét viseli. Főleg a múlt század utolsó negyedéig volt ez így, amikor 1868-tól megindult az első matematikai referáló folyóirat, a Fortschritte der Mathematik. A fentiek szerint láthatjuk, hogy ezek közé sorolható a JEANS-tétel is. A tételt minden kétséget kizáróan először BOLYAI JÁNOS találta meg. Fölfedezését – mint oly sok más munkáját az Appendixen kívül – sajnos nem közölte. Még apjával sem. Levelében csak említi, *„elmélet után mentem"*, de annak lényegét már nem írta meg. Így történt meg, hogy az egyik szép Bolyai-tétel ma nem BOLYAI JÁNOSnak, hanem újrafelfedezőjének nevét viseli. BOLYAInak munkái megjelentetésére nem volt alkalma. De lehetősége lett volna erre a Bolyai-iratok átvizsgálásával megbízott testületnek abban az időben, amikor 1869 és 1894 között a hagyaték az Akadémia Levéltárában porosodott (2.1.§). Ha akkor alaposan átvizsgálják a kéziratokat, bizonyára rábukkannak a fenti „kincs"-re. Közlésével pedig mindenképpen megelőzték volna JEANS 1898-as dolgozatát, s akkor ezt a tételt ma valódi felfedezőjének, BOLYAI nevével tartaná számon a matematika története.

Mikor írhatta BOLYAI JÁNOS a fent idézett levelet apjának? Erre a kérdésre első látásra nem könnyű válaszolni, mivel a levélen nincsen keltezés. Úgy próbáltam megállapítani e fontos levél keletkezésének időpontját, hogy átolvastam BOLYAI FARKAS néhány levelét s azok tartalmából következtettem János írásának időpontjára, az 1855-ös év május hónapjára. Ugyanis Farkas egyik, 1855. május 2-án keletkezett levelében azt kérdezi fiától: „Láttad-e valahol, hogy ha p prímszám s a nem osztható p-vel akkor $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$? Csak annyit üzenj, hogy láttad-é vagy sem, de ne hagyd semmi dolgod félbe" (1358/1). BOLYAI FARKAS egy másik levelében, amelyet 1855 pünkösd másodnapján (tehát 1855. május 28-án) írt, ez áll: „A $2^{\frac{p-1}{2}}$ conversája demonstratioja jónak látszik, ..." (1521/1^v). Bizonyára nem tévedünk, ha János levelét e két levél közé iktatjuk. Jegyzetei pedig, amelyekben elméletét kifejti, még azelőtt keletkeztek. Lehet, hogy még 1842 előtt, mivel németül íródtak. Ezt nem állíthatjuk biztosan, de azt igen, hogy BOLYAI JÁNOS azt a számelméleti tételt, amelyik ma J. H. JEANS nevét viseli, 40-50 évvel publikálása előtt már felfedezte.

A kis Fermat-tétel megfordításának cáfolása nagyon sokat foglalkoztatta BOLYAI JÁNOSt. Bár idézett levelében hangsúlyozza, hogy ebből a célból *„persze elég egyetlen példa is"*, a hátrahagyott kéziratokban újabb ellenpéldákat találunk. Megszerkeszti a

$$4^{14} \equiv 1 \pmod{15} \tag{4.6}$$

(1265/33, 33^v), az

$$5^3 \equiv 1 \pmod{4}$$

(1193/20^v) és az érdekes

$$2^{2^{32}} \equiv 1 \pmod{2^{32}+1} \tag{4.7}$$

kongruenciát is (1550/1).

Egészen egyszerű példa a (4.6)-os, de nem kis meglepetéssel látjuk viszont egy D. H. LEHMER által 1927-ben közölt dolgozatban [83]. D. H. LEHMER, a nagy prímszámtáblázat [82] elkészítője körülbelül 80 évvel később ugyanazt a példát említi cikkében a kis Fermat-tétel fordítottjának megcáfolására, amelyet BOLYAI JÁNOS is megszerkesztett. Nyilvánvaló véletlenről van szó, de számunkra ez az egybeesés többet jelent egy egyszerű véletlennél.

A (4.7)-es kongruencia bizonyítására már nem alkalmas a fenti „elmélet". Itt próbálkozások útján nem jutunk eredményhez. Éppen ezért ebben az esetben BOLYAI is másképpen járt el. Egyszerűen kiindul a nyilvánvalóan igaz

$$2^{32} \equiv -1 \pmod{2^{32}+1}$$

kongruenciából, amelynek mindkét oldalát először négyzetre, majd a 2^{26}-ik hatványra emelve könnyedén jut el a (4.7) összefüggéshez. L. EULER (1707–1783) megmutatta, hogy

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417, \tag{4.8}$$

vagyis ez egy összetett szám. A (4.7) szerint tehát F_5 szám is egy álprím.

Hangsúlyozzuk: a matematika történetében BOLYAI JÁNOS az elsők között kérdőjelezi meg a kis Fermat-tétel fordítottjának érvényességét. Ő akkor szerkeszt több ellenpéldát a kis Fermat-tétel fordítottjára, amikor a matematikai irodalomban csak elvétve találunk ilyen természetű próbálkozásokat. BOLYAI ezekről persze nem tud. A számelmélet történetét tárgyaló munkák, például a kitűnő háromkötetes [37, 1:92] mű, megemlítik, hogy a legkisebb pszeudoprímszámot, a 341-est egy ismeretlen szerző már 1830-ban megtalálta, F. SARRUS pedig 1820-ban igazolta a $2^{170} \equiv 1 \pmod{341}$ kongruenciát, ahonnan már következik a $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$ összefüggés. (SARRUS észrevétele nem keltett különösebb feltűnést. Még L. DIRICHLET számára is ismeretlen volt. Ő ui. a Crelle-féle folyóirat 1828-as évfolyamának 392-es oldalán egy egyszerű és elemi bizonyítását közli a Fermat-tételnek. A tétel fordítottjáról azonban nem tesz említést.) Az ismeretlen szerző [2] és F. SARRUS [96] dolgozatának elolvasása után állítjuk, hogy BOLYAI más módon okoskodott, mint ezek szerzői, bár néhány helyen BOLYAI gondolataival közös ötletek is felvillannak. Például az ismeretlen szerző is azt kérdezi, hogy milyen feltételek mellett érvényes az

$$a^{pq-1} \equiv 1 \pmod{pq}$$

kongruencia. BOLYAItól eltérően arra az eredményre jut, hogy ez akkor igaz, ha $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$, aminek feltétele pedig az, hogy $q-1$ különbség $p-1$-nek többszöröse legyen.

Megjegyezzük, hogy a (4.7)-hez hasonló, vagyis olyan kongruenciákat, amelyekben az

$$F_k = 2^{2^k} + 1 \tag{4.9}$$

alakú ún. Fermat-féle számok szerepelnek, csak az 1900-as évek elején megjelent dolgozatokban találunk [30, 31]. Bizonyos tehát, hogy BOLYAI volt az első, aki kimutatta, hogy az F_5 egy pszeudoprímszám.

Nem érdektelen talán megemlíteni, hogy a pszeudoprímszámok kutatása csak 1876-ban [91] indul meg és aztán 1898-ban [58], majd pedig csak századunk elején folytatódik nagyobb lendülettel. BOLYAI JÁNOS egyik kezdeményezője lehetett volna ennek a problémakörnek, ha gondolatai – mostoha sorsa miatt – nem csupán a kéziratokban maradnak meg.

BOLYAI módszerével természetesen más, az $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ kongruenciát kielégítő n összetett számokat is előállíthatunk. Eljárása azonban csak akkor alkalmazható, ha az n szám két prímszám szorzata.

Biztosan meglepően hangzik az olvasó számára, amikor azt állítjuk, hogy BOLYAInak szándékában állt módszerének kiterjesztése arra az esetre is amikor az n szám három prímszám szorzata. Pedig kézirataink egyik oldalán (1193/20^v) azt a célt tűzi ki magának, hogy megtalálja azokat a feltételeket, amelyek mellett az

$$a^{pqr-1} \equiv 1 \pmod{pqr}$$

kongruencia érvényes, ahol p, q, r prímszámok, a pedig egy olyan egész szám, amely nem osztható ezek közül egyikkel sem. A célt ebben az esetben nem sikerült elérnie. Próbálkozásait a következő szavakkal fejezi be: „... *de már három tényezőre meglehetősen vagy elég bonyolult lesz*". Szinte hihetetlen, hogy BOLYAInak az a gondolata, miszerint a (4.2) kongruenciában az n szám három prímszám szorzata legyen, csak nagyon későre jutott másoknak is eszébe. 1907-ben E. B. ESCOTT [42], majd 1910 és 1912-ben R. D. CARMICHAEL [27, 28] szerkeszt ilyen kongruenciákat.

BOLYAI kísérlete a JEANS-tétel általánosításának alábbi ötletét sugallja:

Tétel

Legyenek $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prímszámok ($n \geq 1$), és legyen a egy olyan egész szám, amelyik nem osztható ezek közül egyikkel sem. Ha

$$a^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1} - 1} \equiv 1 \pmod{p_n},$$
$$a^{p_1 p_2 \cdots p_{n-2} p_n - 1} \equiv 1 \pmod{p_{n-1}},$$
$$\vdots$$
$$a^{p_2 p_3 \cdots p_{n-1} - 1} \equiv 1 \pmod{p_1},$$

akkor

$$a^{p_1 p_2 \cdots p_n - 1} \equiv 1 \pmod{p_1 p_2 \ldots p_n}. \tag{4.10}$$

Bizonyítás

Az

$$a^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1} - 1} \equiv 1 \pmod{p_n}$$

kongruenciából, ha annak mindkét oldalát a p_n-edik hatványra emeljük, az

$$a^{p_1 p_2 \cdots p_n - p_n} \equiv 1 \pmod{p_n}$$

adódik, s innen, mivel $a^{p_n - 1} \equiv 1 \pmod{p_n}$, az

$$a^{p_1 p_2 \cdots p_n - 1} \equiv 1 \pmod{p_n}$$

következik. Hasonlóképpen

$$a^{p_1 p_2 \cdots p_n - 1} \equiv 1 \pmod{p_{n-1}},$$

$$\vdots$$

$$a^{p_1 p_2 \cdots p_n - 1} \equiv 1 \pmod{p_1}.$$

Innen következik (4.10).

Ezt a tételt az $n = 3$ esetre alkalmazva könnyen megmutathatjuk, hogy például $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ egy Carmichael-szám, amelyet felfedezője 1909-ben talált [27]. Valóban, elemi számításokkal igazolhatjuk, hogy bármely olyan a egész számra amely nem osztható a 3, 11 és 17 számok egyikével sem

$$a^{3 \cdot 11 - 1} \equiv 1 \pmod{17}, \quad a^{11 \cdot 17 - 1} \equiv 1 \pmod{3}, \quad a^{17 \cdot 3 - 1} \equiv 1 \pmod{11},$$

s így

$$a^{3 \cdot 11 \cdot 17 - 1} \equiv 1 \pmod{3 \cdot 11 \cdot 17}.$$

Az $n = 4$ esetre hasonló módon igazolhatjuk, hogy

$$a^{13 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 457 - 1} \equiv 1 \pmod{13 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 457}$$

[28].

4.4. A Mersenne-féle számok

BOLYAI JÁNOS egy időben arra is gondolt, hogy a prímek képletét a $2^n - 1$ alakú számokban sikerül majd megtalálnia. Egy 1855. júl. 11-én kelt hivatalos okmány ívén (1509/1) az üresen maradt részeket tölti ki jegyzeteivel. Itt még azt írja – hibásan –, hogy ha p prímszám, akkor a $2^p - 1$ is prímszám, de aztán később apjához küldött egyik levelében helyreigazítva ezt a tévedést, többek között ezt olvashatjuk: „*Azt megmutatni, hogy bármely $2^p - 1$ alakú szám prím mihelyt p prím, ugyanakkor amikor a $2^{2^m} + 1$-gyel bajlódám, magam is megkisértettem, mert amint irataim is megmutatják én is abban a sejtelemben voltam, hogy $2^p - 1$ mindig prím, ha p prím. Ez egy történeti fontosságú felfedezése volna a legelső olyan függvénynek, mely mindig prímet ad. Azonban ez sem valósul meg, mert például $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$...*".

Azt, hogy $2^{11} - 1$ összetett szám már M. MERSENNE (1588–1648) tudta. Meglepő, hogy MERSENNE észrevételéről BOLYAI nem értesült, de amint levelében olvashatjuk, végül ő egyedül is felismerte azt ($1014/1^v$).

4.5. Fermat karácsonyi tétele

A számelmélet egyik klasszikus tétele szerint minden $4m+1$ ($m \in \mathbb{N}$) alakú prímszám a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen felírható két egész szám négyzetének összegeként.

Például $5=2^2+1^2$, $73=8^2+3^2$, $97=9^2+4^2$, $401=20^2+1^2$.

Ezt a nevezetes tételt a matematika története P. FERMATnak tulajdonítja, bár néhány évvel előtte A. GIRARD (1595–1632) is megfogalmazta [37]. Mivel FERMAT felfedezését egy 1640. december 25-én kelt levelében közli barátjával, M. MERSENNE-nel, a tételt szokták FERMAT karácsonyi tételének is nevezni. FERMAT az ún. „descente infinite" vagy „végtelen leszállás" módszerével bizonyította be a tételt [97, 273 old.]. Később EULER és J. L. LAGRANGE (1736–1843) is több bizonyítást talált. Bár napjainkban FERMAT karácsonyi tételének sokféle bizonyításával rendelkezünk [37, 41, 103], érdekes módon a matematikusok most is élénken érdeklődnek iránta. Az utóbbi évtizedekben, sőt években is több olyan publikáció jelent meg, amelyek szerzői a tétel egyszerű, elemi és minél rövidebb bizonyítására törekedtek [4, 5, 43, 44, 121, 130].

A $4m+1$ alakú prímszámok BOLYAI JÁNOS érdeklődését is felkeltették. Vizsgálódásainak eredményeképpen több rövid bizonyítása született FERMAT tételére. Ezt a tételt BOLYAI jól ismerte a Disquisitiones arithmeticae-ből. Apja a Teleki Tékában megtalálta és elolvasta EULERnek a Fermat-tételre adott eredeti bizonyítását. (EULER dolgozata ma is olvasható a Tékában. Egy 1754-ből származó, Szentpéterváron kiadott vaskos folyóirat 55 oldalát foglalja el.) Minden bizonnyal hosszúnak és bonyolultnak találta, s ezért arra biztatta fiát, hogy kísérelje meg annak egyszerűbb igazolását. BOLYAI FARKAS egyik, 1854-ben Jánoshoz írt levelében (1117/1, 1^v, 2) a következő tétel bizonyítását közli: „Ha a, b, c egész számok, és $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ is egész szám, ez vagy két egész quadrát summája, vagy egész quadrát". Levelének első oldalán ezt írja: „Cserébe a $4m+1$ alakú prímek legegyszerűbb bizonyítását várom." Egy másik alkalommal, már 1855-ben azt is tudatja Jánossal, hogy: „A $4m+1$ csak a Petersburgi Actakban van a Comment novi petropolitan Toma V, dátum 1754 s 1755" (1521/1, 1^v).

BOLYAI JÁNOS megfogadta apja tanácsát s felszólítására egy levélben válaszol, amelyben mindössze két oldalon mindjárt négyféle bizonyítást is bemutat. A bizonyításokat különböző kéziratlapokról gyűjthetjük össze (495/2^v; 800/2, 4; 1332/1, 1^v, 2; 1333/1, 1^v). Különös módon BOLYAI többször is lejegyezte azokat, magyarul és németül is, néhány helyen szépen letisztázott, összefüggő szöveget találunk. Bizonyára ezek valamelyikét küldte el apjának.

Ismerkedjünk meg tehát BOLYAI JÁNOSnak a Fermat-tételre adott bizonyításaival. Fogalmazásában így hangzik a tétel: *„Hogy bármely pozitív, $4m+1$ idomú prímszám p két pozitív négyzetszám összvegje, és csak egyként"* (1332/1) (**7. ábra**).

Látni fogjuk, hogy bizonyításaiban BOLYAI a Disquisitiones egyik *„nagyon fontos, szép"* tételére hivatkozik, amely *„Két kép is meg van a Disq. Ar-ben"*. Ennek ellenére ő is készít még egy újabb bizonyítást rá (1190/9).

Első bizonyítás

BOLYAI abból a tételből indul ki, amely szerint ha p egy $4m+1$ alakú prímszám, akkor létezik olyan x egész szám, hogy

$$\frac{x^2+1}{p}$$

is egész szám. Ezt a tételt a Disquisitiones arithmeticae két paragrafusa – a 64-es és a 108-as – is tartalmazza. Ezekre hivatkozik BOLYAI. A fenti törtet

$$\frac{(x+i)(x-i)}{p}$$

alakba írva következik, hogy p-nek létezik ± 1-gyel vagy $\pm i$-vel nem egyenlő két olyan komplex egész e és f tényezője, amelyekre $\frac{x+i}{e}$ és $\frac{x-i}{f}$ komplex egészek. Legyen

$$e=a+ib, \qquad f=c+id,$$

ahol a, b, c, d nullától különböző egész számok. Mivel $p=(a+ib)(c+id)$,

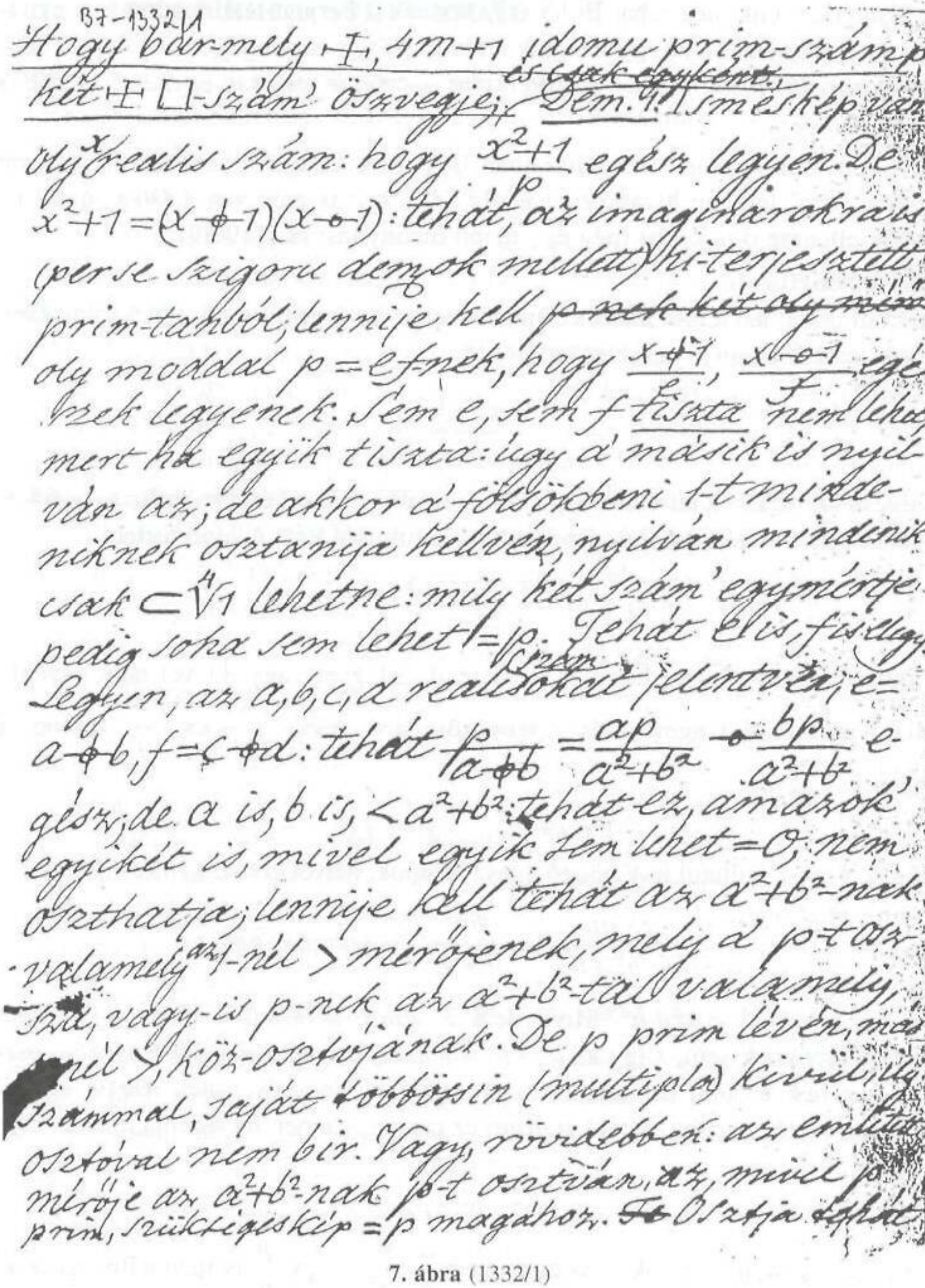
$$\frac{p}{a+ib}=\frac{ap}{a^2+b^2}-i\frac{bp}{a^2+b^2} \quad \text{is komplex egész.}$$

De $a<a^2+b^2, b<a^2+b^2$. Mivel sem a, sem b nem nulla, azért a^2+b^2 nem osztója egyiknek sem, s így az a^2+b^2 valamely egynél nagyobb tényezője osztója a p-nek is, ami azt jelenti, hogy az a^2+b^2-nek és p-nek létezik egynél nagyobb közös osztója. Mivel p prím, ez csak úgy lehet, ha osztója a^2+b^2-nek. Ezért

$$a^2+b^2=np.$$

Az n közös osztója a-nak és b-nek, ezért $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, és így $\frac{p}{n}$ is racionális egészek, ahonnan vagy $n=p$, vagy $n=1$ következik. Mivel az első eset nem lehet, ezért csak $n=1$ lehetséges. Tehát

$$a^2+b^2=p.$$


B7-1332/1

Hogy bármely ±, 4m+1 idomu prim-szám p
két ± □-szám' öszvegje; ~~és csak egyszer~~. Dem. 1. Ismeretesképp van
oly x reális szám: hogy $\frac{x^2+1}{p}$ egész legyen. De
$x^2+1=(x+i)(x-i)$: tehát, az imaginárokra is
(persze szigorú demok mellett) ki-terjesztett
prim-tanból; lennie kell ~~p-nek két oly mére~~
oly móddal $p=ef$-nek, hogy $\frac{x+i}{e}$, $\frac{x-i}{f}$ egé-
szek legyenek. Sem e, sem f tiszta nem lehet:
mert ha egyik tiszta: úgy a' másik is nyil-
ván az; de akkor a' fölsőkbeni i-t minde-
niknek osztania kellvén, nyilván mindenik
csak $\subset \sqrt[4]{1}$ lehetne: mely két szám' egymérője
pedig soha sem lehet $=p$. Tehát e is, f is úgy.
Legyen, az a,b,c,d reálisokat jelentvén, $e=$
$a+bi$, $f=c+di$: tehát $\frac{p}{a+bi}=\frac{ap}{a^2+b^2}-i\frac{bp}{a^2+b^2}$ e-
gész; de a is, b is, $<a^2+b^2$: tehát ez, amazok'
egyikét is, mivel egyik sem lehet $=0$, nem
oszthatja; lennie kell tehát az a^2+b^2-nak
valamely az 1-nél > mérőjének, mely a' p-t osz-
sza, vagy-is p-nek az a^2+b^2-tal valamely,
1-nél >, köz-osztójának. De p prim lévén, ma-
s számmal, saját többösein (multipla) kívül, ily
osztóval nem bír. Vagy, rövidebben: az említett
mérője az a^2+b^2-nak p-t osztván, az, mivel p
prim, szükségeskép $=p$ magához. ~~Te~~ Osztja ~~tehát~~

7. ábra (1332/1)

BOLYAI a bizonyítást a következő szavakkal fejezi be: *„és így reped(ez), hasad, nyílik a p és születik gyönyörű pozitiv iker négyzetszám, az anya p maga is éppen azzá változván."*

A felbontás egyértelműségét a következőképpen bizonyítja. Tételezzük fel, hogy $p=a^2+b^2$ még másképp is felírható két egész szám négyzetének összegeként, azaz

$$p=x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)=(a+ib)(a-ib).$$

Mivel $x+iy=(u+iv)(t+iz)$,

$$\frac{a+ib}{u+iv} \quad \text{és} \quad \frac{a-ib}{t+iz}$$

(komplex) egészek. De akkor $x-iy=(u-iv)(t-iz)$, tehát

$$p=(u^2+v^2)(t^2+z^2).$$

p prím lévén, $u^2+v^2=1$, vagy $t^2+z^2=1$. Tehát az első esetben vagy u, vagy $v=0$, s a másik ± 1, s hasonlóképpen a második esetben is. Így

$$\frac{a+ib}{x+iy} \quad \text{és} \quad \frac{a-ib}{x-iy}$$

egészek. Jelöljük ezeket $r+is$ és $(r-is)$-sel. Akkor $r^2+s^2=1$, ahonnan $x+iy=$ $=(a+ib)\sqrt[4]{1}$ következik.

Második bizonyítás

Az első bizonyítás alapján $\frac{p}{a+ib}$ egész. Akkor nyilván $\frac{p}{a-ib}$ is az. Az $a+ib$ és $a-ib$ legnagyobb közös osztója nem lehet $x+iy$ alakú, mert akkor $x-iy$ is az volna. Mivel p prím, az $a+ib$ és $(a-ib)$-nek ± 1-en és $\pm i$-n kívül más közös osztójuk nem lehet, ezért ezek egymáshoz relatív prímek, s így szorzatuk, a^2+b^2 is osztója p-nek. De $a^2+b^2>1$, tehát $p=a^2+b^2$.

Harmadik bizonyítás

A Disquisitiones arithmeticae 2, 4, 9, 108 paragrafusai szerint ha $p=4m+1$ prímszám, akkor létezik $\frac{p}{2}$-nél nem nagyobb olyan x egész szám, hogy

$$\frac{x^2+1}{p}=q$$

egész. Itt

$$q=\frac{x^2+1}{p}\leq\frac{\frac{p^2}{4}+1}{p}=\frac{p}{4}+\frac{1}{p}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget, mivel $p=4m+1$, még így is írhatjuk:

$$q \leq m + \frac{1}{4} + \frac{1}{4m+1},$$

ami azt jelenti, hogy ha $p>1$, akkor $q<m+1$ (q egész szám!). Mivel $x^2+1=$ $=(x+i)(x-i)$, és a két tényező egyikének sem osztója $4m+3$ alakú prímszám (könnyű bizonyítani, hogy ennek komplex egész osztója nincs), tehát ilyen alakú prímszám az x^2+1-nek sem lehet osztója, ezért q is $4m+1$ alakú. (Itt megjegyzi BOLYAI, hogy ezt a komplex számok nélkül is tudja igazolni.)

Ha most megmutatjuk, hogy ha abból, hogy a tétel érvényes minden p-nél kisebb $4m+1$ alakú pozitív prímre, úgy az p-re is igaz, és mivel $5=1^2+2^2$, akkor minden ilyen alakú prímre igaz. $4\cdot 0+1=1^2+0^2$ (161/6).

Legyen $p>5$. Az előbbiek szerint

$$q<m+1=\frac{p-1}{4}+1=\frac{p+3}{4}<p,$$

s ha most $q=r^2+s^2$, ami feltételünk szerint lehetséges, úgy

$$p=\frac{x^2+1}{r^2+s^2}=\left(\frac{xr+s}{r^2+s^2}\right)^2+\left(\frac{r-xs}{r^2+s^2}\right)^2,$$

vagyis p két racionális szám négyzetének összegével egyenlő. Akkor viszont létezik két olyan pozitív egész szám is, amelyek négyzetének összege p. (Ezt a tulajdonságot BOLYAI egy korábbi napon írt levelében (800/3) bizonyítja be, megjegyezve, hogy *„itt nagyon derék szolgálatot tesz.”*)

Negyedik bizonyítás

Az első bizonyítás szerint $p=(a+ib)(c+id)$. De akkor $p=(a-ib)(c-id)$-vel is egyenlő, ahonnan $p^2=p\cdot p=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ s innen, mivel $a^2+b^2>$ >1, $c^2+d^2>1$, $p=a^2+b^2=c^2+d^2$ következik ($1333/1^v$).

A bizonyításokban, azok egyszerűsége és rövidsége mellett, a leginkább szembetűnő, hogy BOLYAI JÁNOS a komplex egészeket alkalmazza. Azokban az években ezt természetesnek is tarthatjuk, hisz akkorra GAUSS már kidolgozta és közzétette a komplex egészek elméletét. Erről viszont BOLYAI nem tudott. Amint arról a következő fejezetben meggyőződhetünk, BOLYAI itt saját elméletét használta fel, amit GAUSStól függetlenül és vele egy időben ő is felfedezett.

Az első bizonyítást BOLYAI a következő szavakkal zárja: *„És hiszem, sőt fogadni merném, hogy* EULER *is így hozta ki, azonban az imaginárius prímtan rigorosa tiszta fogalma és szigorú demonstrációja tudása nélkül s azért csodálom is, hogy ismerhette egy* GAUSS *a Disq. ar. 218 föül, demonstrációnak el. Hihetőleg*

ő sem lévén, kivált akkor, az imagináriusokra nézve, tisztában, csak ábrándozva vette magának azon merészséget, az imagináriusokra ott is, mint egyebütt szokták, kiterjeszteni a reálokról igazakát" (800/2) (**8. ábra**).

Tudjuk, hogy EULER nem így „*hozta ki*„. BOLYAI megjegyzéséből azt következtethetjük, hogy amikor bizonyításait kidolgozta, még nem ismerte EULERnek a Teleki Tékában megtalálható és már előbb említett 55 oldalas bizonyítását, csak tudott arról, hogy azt GAUSS is megemlíti a Disquisitionesben. Apja éppen ezért figyelmezteti 1855-ben, hogy EULER dolgozatát a Petersburgi Actákban találhatja meg.

A két négyzetszámtétellel BOLYAI FARKAS is próbálkozott, de ő nem a komplex egészek felhasználásával bizonyított. Erről BOLYAI JÁNOS következő nyilatkozatából értesülhetünk: „*Á 2 □-tan okát* {bizonyítását} $\sqrt{-1}$ *nélkül mint állítja* BOLYAI FARKAS *adhatni, szép volna, ha lehet s nem hibázta el, szeretném látni*" (895/9).

BOLYAI egy másik érdekes mondata: „*De van még a* GAUSS*én és* EULER*én kívül egy negyedik demonstrációm is a számtanban mindenütt átható ... kulcsom által, mely azonban többől áll, minthogy itt most egy levélben megírhatnám*" (1331/1).

Az általunk negyediknek feltüntetett rövid bizonyítást BOLYAI nem számozta meg. Azt igen apró betűkkel írva beszorította három sor közé ($1333/1^{v}$) (**9. ábra**). Csak nemrég sikerült kibetűzni a sorok közül ezt a valóban „egy mondatos" bizonyítást. Nem tévedünk, amikor azt állítjuk, hogy BOLYAInak ebben a bizonyításban alkalmazott eleganciáját napjainkban sem szárnyalta túl senki.

Ismét csak következtetni tudunk arra, hogy melyik időszakban történt a BOLYAI FARKAS és János közötti levélváltás. Sajnos BOLYAI JÁNOS csak igen ritkán írt keltezést a leveleire, de néha ezt BOLYAI FARKAS is elmulasztotta. Ezúttal azonban megbízható támpontjaink vannak, amelyek segítségével megállapíthatjuk az írások keletkezésének évét, ezzel is pontosítva P. STÄCKEL egyik, szerintünk hibás dátumát. Ő ugyanis azt sejteti egy helyen [106, 1:96], mintha Farkas 1842-ben szólította volna fel fiát arra, hogy készítse el a $4m+1$ alakú prímszámok két négyzet összegére való felbontásának legegyszerűbb bizonyítását. Az igazság az, hogy erre jóval később, az 1850-es évek közepe táján került sor. Bár a már fentebb idézett és ezt a felszólítást tartalmazó levélen (1117/1, 1^{v}, 2) sincs keltezés, de BOLYAI FARKAS utolsó mondatából: „Ennyi minden bú fellegzés alatt is egy szomorú jelentést kelle írnom B. KEMÉNY PÁLNÉ kérésére ..." egyértelműen következtethetünk írása keletkezésének évére, az 1854-es esztendőre. Tudjuk, Farkas gyakran elvállalta, hogy másokról halotti búcsúztatót készítsen. Nos ez történt most is. KEMÉNY PÁL malomfalvi földbirtokos halálakor (1854. április 15.) felesége kérésére írt BOLYAI FARKAS nekrológot. A báró

8. ábra (800/2)

9. ábra (1333/1^{b})

életét és munkásságát méltató beszéd szövegét KONCZ JÓZSEF is közli a kollégium történetéről írt könyvében [79].

Azon a levélen (1521/1, 1^v), amelyben BOLYAI FARKAS közli fiával, hogy „A $4m+1$ csak a Petersburgi Actákban van" ez áll: 1855 pünkösd másodnapján. János bizonyításainak leírását e két levél keletkezésének időpontjai közé kell helyeznünk. Eligazítónk BOLYAInak az EULER bizonyítására való utalása („*fogadni merném, hogy* EULER *is így hozta ki*"). Segítségünkre van még egy, a Fermat-tétellel kapcsolatos vizsgálódásokkal egy időben készült oldal is (800/3), amelyre a harmadik bizonyítás végén hivatkoztunk. Ez BOLYAI JÁNOSnak azt az állítását tartalmazza, amely szerint már szinte egy negyedszázada (1831 első fele) „*nagy kényelemmel és gyönyörrel*" él a komplex számoknál alkalmazott új jelöléseivel.

Következésképpen BOLYAI JÁNOS számelméleti eredményeinek egy része az 1854–55-ös években vagy azelőtt keletkezett. Leveleit a FERMAT karácsonyi tételéről, de a kis Fermat-tételével kapcsolatos kutatásairól is ebben az időszakban írta apjának.

A $4m+1$ alakú prímszámokra vonatkozó tételeket BOLYAI meghökkentően elemi eszközökkel bizonyította be. 140 évvel ezelőtti gondolatait számos mai tankönyvben is megtalálhatjuk. FERMAT karácsonyi tételének bizonyításánál a legtöbb szerző napjainkban is a „*szép*" $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ tételből indul ki.

A matematika története iránt érdeklődő olvasó joggal kérdezheti, mennyire voltak újak, eredetiek BOLYAI JÁNOS gondolatai. A FERMAT karácsonyi tételének sokféle bizonyítása között, amint arról L. E. DICKSON (1874–1954) beszámol [37], létezik néhány olyan is, amelyekben a szerzők komplex számokat alkalmaznak. Az első, aki a komplex egészek segítségével bizonyította Fermat-tételét, G. EISENSTEIN volt 1844-ben [38], majd nem sokkal utána, 1848-ban P. L. WANTZEL (1814–1848) alkalmaz komplex egészeket két egész szám négyzetének összegével kapcsolatos számelméleti tétel bizonyításánál [125].

BOLYAI JÁNOS ezekről a munkákról semmit sem tudott. Áttanulmányozva az említett dolgozatokat, azonnal megállapíthatjuk, hogy BOLYAI gondolatmenete teljesen eltérő az EISENSTEIN és a WANTZEL által követett úttól. Érdekes, hogy a Fermat-tétel bizonyítására már a múlt században néhány olyan dolgozat is megjelent, amelyekben a szerzők az $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ kongruenciából indultak ki, akárcsak BOLYAI, de azzal a különbséggel, hogy a folytatásban már nem a komplex egészeket alkalmazzák. Így például 1848-ban két ilyen cikk is napvilágot látott J. A. SERRET (1819–1885) [37] és C. HERMITE (1822–1901) [57] tollából. Mindkét szerző a törtek lánctörtbe fejtése segítségével bizonyítja a tételt. HERMITE dolgozata rövidségével tűnik ki. Mindössze egy oldal. BOLYAI JÁNOS

halála után jóval később, 1886-ban R. LIPSCHITZ (1832–1903) is a fenti kongruenciával kezdi dolgozatát. Ő a folytatásban is a komplex egészeket felhasználva bizonyítja be Fermat tételét, de másképpen, mint BOLYAI [86].

Biztosan állíthatjuk tehát, hogy BOLYAI JÁNOS bizonyításai eredetiek, akár más munkái. Nem ismerte az említett dolgozatok egyikét sem, egyedül, önállóan érte el eredményeit.

4.6. A Fermat-féle számok

Az

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

alakú számokat (ahol n természetes szám) Fermat-féle számoknak nevezzük, amelyeknek a története ugyancsak érdekes és hosszú. FERMAT szilárdan hitt abban, hogy az összes ilyen típusú szám prím, noha ő csak az $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ és $F_4 = 65637$-et számította ki. Sejtése akkor dőlt meg, amikor CHR. GOLDBACH felszólítására EULER 1732-ben megmutatta, hogy a következő Fermat-féle szám

$$F_5 = 641 \cdot 6700417,$$

azaz nem prímszám. Valószínű, hogy a történet ezzel be is fejeződött volna, ha a Fermat-féle számok nem tűnnek fel a szabályos sokszögek körzővel és vonalzóval történő szerkeszthetőségénél. A számelméleszek a múlt században és századunk elején sok fáradságos munkát végeztek, hogy újabb Fermat-féle prímszámokat találjanak. Ma is folytatják a számításokat, de most már elektronikus számítógépekkel. Eddig az eredmény negatív. Nem találtak újabb Fermat-féle prímszámot, és sok matematikus most már afelé hajlik, hogy talán nincs is belőlük több.

BOLYAI JÁNOS képzeletét is megragadták a Fermat-féle számok. Kézírásos hagyatékának számos lapján, kis céduláján, néha más természetű szövegek közé beszúrva olyan hosszabb, rövidebb jegyzeteket találunk, amelyekben Fermat-féle számok bukkannak fel. Természetesen őt is az a kérdés nyugtalanította, hogy az F_n alakú számok prímek-e vagy sem?

Édesapjához írt egyik levelében két helyen is utal a Fermat-féle számokkal való kapcsolatára:

„3. *A numerus perfectus* {tökéletes számok} *valamint a* $2^{2^m} + 1$*-re nézti előbbi demonstrációm is egyébaránt jó és szép . . .*

4. *Azt megmutatni, hogy bármely* $2^p - 1$ *idomú szám prím mihelyt* p *prím, ugyanakkor, mikor a* $(2^{2^m} + 1)$*-gyel bajlódám, éppen magam is megkísértettem,*

mert valóban, mint irataim is mutatják, magam is azon sejtelmemben valék, hogy úgy $2^p - 1$ mindig prím, ..." (1014/1^v).

Ezen a levélen sincs keltezés, megírásának időpontjára mégis megbízhatóan következtethetünk abból a megjegyzéséből, amely szerint egy időben azt sejtette, hogy a $2^p - 1$ alakú számok prímek, ha p prímszám. Ezt a feltételezést még egy 1855. július 11-én kelt okmány üresen maradt részein is hangoztatja (1509/1). Később felismerte, hogy $2^{11} - 1$ összetett szám (4.4.§), amit idézett levelében BOLYAI FARKASsal is közölt. Levele tehát 1855 közepe után íródott.

A levél szövegéből és az 1509/1 oldalon található följegyzésekből arra következtethetnénk, hogy BOLYAI a $2^{2^m} + 1$ számokkal 1855 közepe táján vagy még azelőtt „*bajlódott*". Szintén az 1855-ös esztendőre utal a Marosvásárhelyt 1855. március 20-án kelt kis cédulán – BOLYAI Kapitány Kontójára – a sorok közé írt megjegyzés-töredék: „EULER *által ismert* $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = \ldots$" (1127/1). Egy 1841. február 2. után készült íráson is (759/12^v) találunk olyan próbálkozásokat, amelyek a $2^{2^5} + 1$ és a $2^{2^6} + 1$ számokhoz kötődnek. Megjegyzi, hogy az F_5-ről EULER mutatta ki, hogy összetett szám, de hozzáteszi: neki (EULERnek) ehhez nem volt általános kulcsa. A Fermat-féle számok tehát már elég korán, Domáldon (!) felmerültek a kísérleteiben.

Alaposan szemügyre véve BOLYAI JÁNOS jegyzeteit, különösen a „*jó és szép*" bizonyítás megtalálásának reménye sarkallt. Sajnos ez nem vált valóra, viszont sikerült BOLYAInak a Fermat-féle számok prímfelbontásához kapcsolódó gondolatait, próbálkozásait felfedni.

Kezdjük először BOLYAInak a Fermat-féle számokhoz fűződő néhány megjegyzésével. A prímszámok képletének eddigi hiábavaló kereséséről való fejtegetéseit ezzel zárja: „... *a* $2^{2^m} + 1$*-re nézve is* FERMAT *elsietve, hirtelenkedve, öncsalódva állítván* ..." (1199/3^v), hogy minden m-re prímszám. Ismételten írja, hogy F_5-ről EULER bizonyította be, hogy nem prím (1214/31^v). Több alkalommal kijelenti, hogy célja a Fermat-féle számok (de másoknak is) prímtényezős felbontása: „*Új egyszerű, egyenes, könnyű mód bármely számnak minden faktorát megadni oda számlálva 1-et és majd a számot is*" (1097/1, egy 1848. október 7-i képviselőházi határozat hátlapján). A $2^{2^m} + 1$ alakú számokat legkitűnőbb számoknak nevezi, s a $2^{32} + 1$, $2^{64} + 1$-et saját, módszerével tényezőkre szeretné bontani (1193/16^v).

Azt a merész feladatot is kitűzi saját magának, hogy megkeresse a nevezetes $2^{2^m} + 1$ számok összes prímtényezőit, valahányszor ezek a számok összetett számok (745/5^v, 1048/3). Lényegében ugyanezt a szándékát fejezi ki, amikor azt mondja: „*el kell dönteni, hogy* $2^{64} + 1$, ... *prímek vagy nem*" (1021/1).

A továbbiakban vegyük rendre BOLYAI JÁNOSnak a Fermat-féle számokkal kapcsolatos észrevételeit. Bár végül is nem sikerült neki még az F_6 tényezőit sem megtalálnia, próbálkozásait – úgy vélem – ennek ellenére érdemes feljegyeznünk.

Ezzel a nehéz feladattal kapcsolatos leginkább figyelemre méltó megállapítása BOLYAInak, hogy „*A* $2^{2^m}+1$ *alakú számok mindig* $6n-1$ *alakúak, következésképpen sohasem oszthatóak 3-mal*" (1048/3). Az állítást a következőképpen bizonyítja: Mivel $2^{2m-1}+1=(2+1)(\ldots)$ következik rendre, hogy $2^{2m-1}+$ $+1=3n$, $2^{2m-1}=3n-1$, $2^{2m}=6n-2$, vagyis 2-nek minden páros hatványa $6n-2$ alakú. Akkor $2^{2m}+1$, azaz $2^{2^k}+1$ viszont $6n-1$ alakú (1550/1). Itt $m, n \geq 1$, $k \geq 0$ természetes számok.

Két másik idevágó észrevétele BOLYAInak: mivel bármely n természetes számra $2^{2n} \equiv 1 \pmod 3$, következik, hogy $2^{64} \equiv 1 \pmod 3$ (1021/1, 762/12). Továbbá, mivel ha $m \geq 2$ természetes szám a 2^m+1 tényezői $4k+1$ alakúak (1193/24) s tudva azt, hogy minden $4k+1$ alakú prímszám két egész szám négyzetének összegeként állítható elő, írhatjuk, hogy

$$2^{2^m}+1=(p^2+q^2)(r^2+s^2)$$

(1214/25).

Végül az 1048/3 oldalon megpillanthatjuk mint egy gondolatsor következményét (a gondolatsor viszont nem található), hogy

$$2^{2^m}+1=x\,y,$$

ahol természetesen $m \geq 5$.

Az elmondottakból láthatjuk, hogy BOLYAI JÁNOS sokat próbálkozott a Fermat-féle számok prímfelbontásával. Sajnos ezek a kísérletek nem vezettek eredményre, de mutatják, hogy ő nem riadt vissza a nehéz problémáktól, többször visszatért a megoldásukhoz.

Az 1732-es évtől, amikor is EULER kimutatta, hogy az F_5 összetett szám, szinte 150 évnek kellett eltelnie, amíg 1880-ban a 82 éves F. LANDRAYnek sok havi kísérletezés után sikerült tényezőkre bontania az F_6-ot [37, 1:376–377]. Lehet, hogy ez alatt a másfélszáz év alatt még más is próbálkozott ezzel a feladattal (E. LUCAS azt állítja, 1883-ban, hogy ő már LANDRAY előtt megtalálta az F_6 tényezőit [37, 1:377]). A matematika története azonban másokról nem tud. Kézirataiknak tanúsága szerint tehát BOLYAI JÁNOS egy olyan problémával is foglalkozott, amelyre halála után csak 20 évvel sikerült pontos választ adni.

Érdekes, hogy a Fermat-féle számokra vonatkozó jegyzeteinek nagy része német nyelvű. Lehetséges, hogy az erre vonatkozó kísérleteit már az 1840-es

évek elején elkezdte. Ezt a föltevést az 1841-ben Domáldon készült följegyzések is igazolják (759/12^v).

4.7. Wilson tétele

WILSON tétele azt mondja ki, hogy ha p egy prímszám, akkor $(p-1)! \equiv \equiv -1 \pmod{p}$, vagyis $(p-1)!+1$ osztható p-vel. A tételt E. WARING publikálta, de beismeri, hogy azt először JOHN WILSON (1741–1793) fogalmazta meg bizonyítás nélkül. WILSON tételét először LAGRANGE bizonyította be 1771-ben. Ugyancsak LAGRANGE bizonyította be a WILSON tétel fordítottját is: ha n osztja $(n-1)!+1$-et, akkor n prímszám [37, 1:52–63].

Ezek szerint a $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ összefüggés jellemzi a prímszámokat, vagyis pontosan akkor igaz, ha a p szám prím. Ebben áll a tétel elméleti fontossága. Segítségével eldönthetjük, hogy egy p egész szám prím-e vagy nem. Alkalmazása azonban gyakorlatilag szinte lehetetlen, mert a (p-1)!+1 igen nagy szám, ha p nagy.

WILSON tételével természetesen foglalkozik GAUSS is a Disquisitiones arithmeticae-ben. A 76-os §-ban megemlíti, hogy azt LAGRANGE, majd később EULER is bebizonyította, a 72.§-ban pedig bemutatja saját bizonyítását is.

A Wilson-tétellel BOLYAI JÁNOS kéziratainak több lapján találkozunk. A tételt *nyilvánvalóan a Disquisitionesben olvasta s feltűnhetett neki, hogy* GAUSS nem beszél annak fordítottjáról. Ez különben a mai olvasó számára is különösnek látszik, mert a Disquisitiones megjelenése előtt már ketten is elintézték ezt a kérdést. Amint már említettük, LAGRANGE, majd 1788-ban GENTY is [37, 1:64]. Úgy látszik, ez elkerülte GAUSS figyelmét, s így a BOLYAIak (akik számelméleti ismereteiket főképpen GAUSS munkájából szerezték) sem tudtak arról, hogy már létezik a Wilson-tétel fordítottjának a bizonyítása is. Érdekes, hogy L. DIRICHLET sem beszél a tétel fordítottjáról a (4.3.§)-ban már említett Crelle-folyóirat 1828-as számában közölt dolgozatában. DIRICHLET ebben a később sokat idézett cikkében közös forrásból vezeti le a kis Fermat- és a Wilson-tételt [37, 1:66].

BOLYAI JÁNOS számára, akit több nagy szám prím vagy összetett volta érdekelt s aki – amint már tudjuk – a prímszámok képletét is kereste („*bármely megadott törvény szerinti számsornak* – írja ezzel kapcsolatban az 538/1 oldalon is – . . . *általános vagy m hely című íze* {tagja} *m által geberül* {algebrailag} *kitehető, de hát az előszámokat???* {prímszámokat} *(Valóban) ezt, ennek is így létét sejtem.*") fontos volt a tétel fordítottja is. Ezt sikerült elérnie, de a Wilson-tétel nem bizonyult a prímszámok egy „*excellent és nagyon kényelmes*" kritériumának, mint amilyent a kis Fermat-tételtől is remélt.

A Wilson-tétel *„conversájának”* bebizonyításával apja is megpróbálkozott. BOLYAI FARKAS *1853. november 15-én kelt levelében ezt írja: „Hogyha p* prímszám, s a minden nálánál kisebb számok faktuma {szorzata} f, akkor $f+1$ oszlik p-vel, ez meg van több helyt mutatva: de a conversáját {fordítottját} sehol se láttam megmutatva; GAUSS merőben hallgat ezen conversáról. Hanem többen értik úgy, de megmutatás nélkül. Jól meg kell nézni, megvan-é az írásban mind a két fele mutatva: nálam van valami azon esetre, ha ott nem volna; de mivel könnyű hibázni, még jobban átnézem” [11, 272 old.].

BOLYAI FARKAS itt bevallja, hogy már kísérletezett a Wilson-tétel fordítottjának a bebizonyításával, de még nem egészen biztos annak helyességében. Ugyanakkor János több helyen ($1193/16^{v}$, 1265/40, 1396/1, $895/9^{v}$) is ír arról, hogy apja a tétel fordítottját bebizonyította. Az $1193/16^{v}$ oldalon följegyzi, hogy az *„oly szép és fontos Wilson-tétel fordítottját apám és én is bebizonyítottuk.”* A $895/9^{v}$ oldalon ezt írja apjáról: *„A Wilson-tan fordítottjának is szigorú, bár is nem rövid okát* {bizonyítását} *adta.”*

Annak ellenére, hogy a Disquisitiones arithmeticae-ben megtalálta a Wilson-tétel bizonyítását, BOLYAI elkészíti a sajátját is ($1214/14^{v}$) és legalább három helyen leírja a tétel *„fordítványának”* is a bizonyítását ($1021/2^{v}$, $1214/14^{v}$, 1265/40).

Mielőtt ezt a bizonyítást bemutatnánk, lejegyezzük BOLYAInak az egyik kéziratlapon található pár mondatát:

A Wilson-tétel így is írható:

$$\frac{(p-1)!+1}{p}=q \quad \text{vagy} \quad (p-1)!+1=p\,q,$$

ahol q egész szám. A q legkisebb értékei, ha $p=2,3,5,7,11,13,17,\ldots$ ezek: $1,1,5,103,329891,36\,846\,277$, és még egy érték $p=17$-re (ezt nem számítja ki BOLYAI). Ezután megjegyzi, hogy ezek közül a számok közül az utolsó hármat, aztán a $2^{32}+1=$, $2^{64}+1$ és a GAUSS által vizsgált két számot a $97\ldots, 4\ldots\ldots$-et (csak így!) a saját módszerével tényezőre fogja bontani ($1193/16^{v}$).

A következőkben – mai jelöléseinket és elnevezéseinket használva – ismertetjük BOLYAI JÁNOSnak a Wilson-tétel fordítottjára adott bizonyítását:

Legyen

$$(p-1)!\equiv-1 \pmod{p}.$$

Tételezzük fel, hogy p nem prím és, hogy e a p szám egy prímosztója, azaz $p=e\,p_1$. Wilson-tétele szerint

$$(e-1)!\equiv-1 \pmod{e}.$$

De akkor

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{e}$$

ahonnan $(e-1)! \equiv (p-1)! \pmod{e}$, azaz $1 \equiv \frac{(p-1)!}{(e-1)!} \pmod{e}$. Mivel $e < p$, $\frac{(p-1)!}{(e-1)!} \equiv 0 \pmod{e}$, ami nyilván csak úgy lehet, ha $e = p$, tehát p-nek nincs más osztója 1-en és p-n kívül, ami azt jelenti, hogy p prímszám (1021/2^v).

Megjegyezzük, hogy az 1214/14^v oldalon található bizonyítások az 1843-as év után keletkeztek.

4.8. Bolyai János bűvös négyzete

Elhiszi a Kedves Olvasó, hogy BOLYAI JÁNOS bűvös négyzetet (ami olyan természetes számokkal képezett négyzetes mátrix, amelynek minden sorában, minden oszlopában és mindkét átlójában lévő számok összege ugyanaz) is szerkesztett? Pedig így van. Egy nyugodt percében ő is elszórakozott a számokkal. Játékos kedvében lehetett, de az is meglehet, hogy nagyon komolyan vette ezt a játékot.

BOLYAI JÁNOS általánosan, betűkkel szerkeszti meg a bűvös négyzetét. Ha a betűk helyébe különböző értékeket helyettesítünk, vigyázva arra, hogy mindig természetes számokat kapjunk, más-más felépítésű bűvös négyzetekhez jutunk.

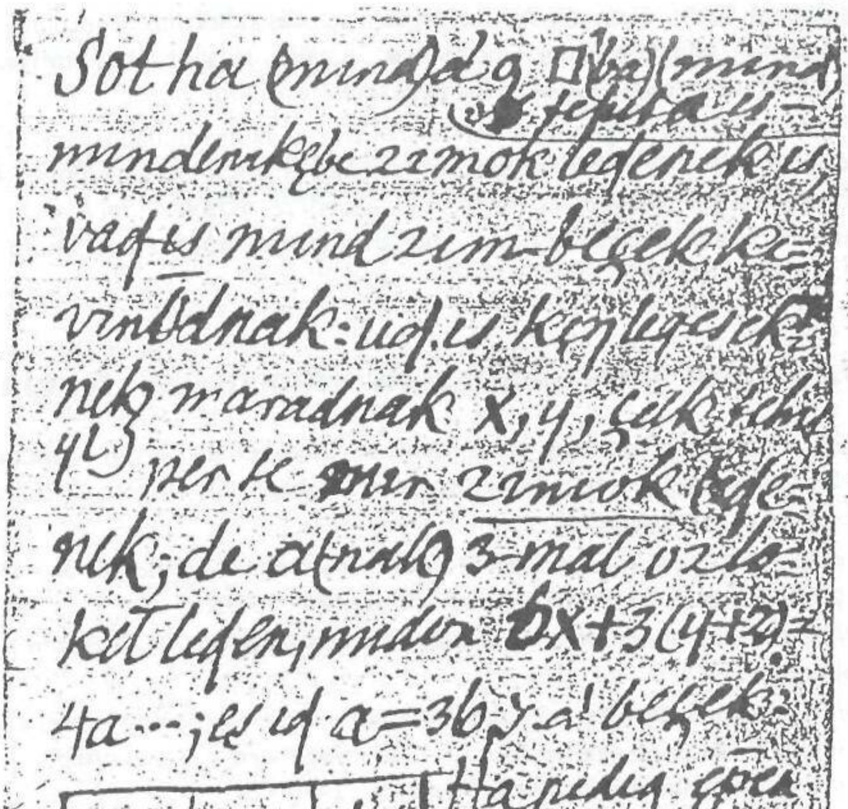
BOLYAI JÁNOS bűvös négyzete:

x	y	$3b-x-y$
4b-2x-y	b	2x+y-2b
$x+y-b$	$2b-y$	$2b-x$

Úgy tűnik, hogy az a néhány sor, amelyet a bűvös négyzetet tartalmazó kéziratlapra (372/4) (**10. ábra**) írt BOLYAI, csak a befejezését alkotja egyik gondolatának. Erre utal a

$$6x + 3(y+z) = 4a$$

egyenlőség, ahol nem tudjuk, hogy mit jelöl a z és a betű, továbbá az, hogy az első mondat így kezdődik: „*Sőt ha* ...". BOLYAI legtöbb új gondolatát NB-vel


Sőt ha (mindég □ben) (mind
fejtsd ...
mindenikbe számok legyenek is,
vagyis mind szám-betűk ke-
vinődnak: úgy is kéjlegesek-
nek maradnak x, y, (csak egy-
szer) per ke ... számok lesz-
nek; de a (ennek) 3-mal oszló-
kat legyen, mikor 6x+3(y+z)=
4a...-jel úgy a=36 (a' betűk:

x	y	36−x−y
4b−2x−y	b	2x+y−2b
x+y−b	2b−y	2b−x

Ha pedig éppen
1,2,3,...,9 szám-
jelen-ből legyen:
úgy persze csak
egy lenegesen
kyzö mind van.
Lásd ´s Tyrkzd-kö ökrt italján
hin-hin □ mezők e ozhoz □nál
az egy-pon, néha egy-pen, vagy zenei
törökből...
BF.372/4

10. ábra (372/4)

{nota bene} kezdi. Nem sikerült megtalálni az írás feltételezett kezdetét, pedig ez minden bizonnyal hasznos lenne annak megállapításához, hogy milyen módszerrel alkotta meg BOLYAI a bűvös négyzetét.

Rövid írásának végén BOLYAI felszólít arra, hogy általánosítsuk az általa készített 3×3-as bűvös négyzetet, tetszőleges $n \times n$-es négyzetre: „*Lásd's fűrkészd-ki okát általján bár-hány* = □ *mezőkre osztott* □ *nél az egy-póti* {számtani szorzat}, *néha egy-pári* {mértani sorozat} *vagy zenei* {harmonikus sorozat} *sorokbóli* ..."

4.9. Néhány más természetű számelméleti feladat

Ebben a paragrafusban még felsorolunk röviden néhány olyan számelméleti problémát, amelyek elvétve fel-felbukkannak a hagyaték lapjain. A bizonyításokat most nem részletezzük.

a) BOLYAI egyik följegyzésén ($1509/1^v$) a következő kijelentés bizonyítását találjuk: ha a és b egymáshoz relatív prím számok, akkor $2^a - 1$ és $2^b - 1$ is relatív prím számok. A kijelentés fordítottját nem említi BOLYAI. Amint tudjuk, az is igaz.

b) Nyilatkozik BOLYAI a különböző számrendszerekről is. Így érvel a kettes számrendszer hasznossága mellett: „... *erő kiméléséért s egyszerűségért inkább a kettős szám írásmódot kellene bévenni* ..." (486/1).

c) BOLYAI JÁNOS is megfigyelte, hogy a prímszámok rendkívül szabálytalanul fordulnak elő a természetes számok sorozatában. Érdekelte azok sűrűsége (1396/1), vagyis a szomszédos prímek közötti hézagok nagysága. Azt javasolja, hogy: „*Meg kell kissé vizsgálni a főszám-tárokból* {prímszámtáblázatok} *a legmagasabbakat, hogy körülbe mily közök- vagy ugrás- vagy külség vagy küly vagy változásokkal mennek, nőnek? Nő a külség is, vagy csak véges marad? Az utóbbi esetben van remény a kitehetéshez;* ..." (538/1).

Valószínű BOLYAI nem ismerte a CSERNÁK LAJOS által a hollandiai Deventerben 1811-ben kiadott törzsszám-táblázatot. Ez a nagyon precíz munka 1020000-ig tartalmazta a prímszámokat. Korában a matematikusok körében ismert volt, még GAUSS is elismerően írt róla.

d) Egy keltezés nélküli levél hátán ($1015/1^v$) tömören ennyi áll: 4272943 *edi szám* {prímszám}. Ez a szám valóban törzsszám [82, 122 old.]. Külön köszönjük SHARON L. DRUGAN-nak, aki KISS LEVENTE közbenjárására volt szíves elküldeni a Madisonban (Wisconsin – USA) őrzött The First Six Million Prime Numbers mikrofilm 241. oldalának fényképét, amely szintén magában foglalja ezt a számot. Honnan tudhatta BOLYAI, hogy ez a szám prímszám?

e) Több helyen olvashatunk még a számelmélet körébe tartozó kérdésekről (elsőfokú diofantikus egyenletekről, a Pell-féle egyenletekről, az eratoszthenészi szitáról, a tökéletes számokról stb.), amelyeket most nem részletezünk.

Úgy gondoljuk, hogy az előzőekben bemutatott eredmények alapján kijelenthetjük, hogy BOLYAI JÁNOS nemcsak foglalkozott a számelmélettel, hanem olyan felfedezésekkel is gazdagította azt, amelyekre más matematikusok csak utána, évtizedek múlva gondoltak. Igaz, hogy ezek az újdonságok nem váltak ismertté, s így nem is lehettek hatással a számelmélet fejlődésére. Pedig ha alkalma lett volna ezeket publikálnia különböző folyóiratokban vagy könyvekben, bizonyára jótékony befolyást gyakoroltak volna mind a magyar, mind a nemzetközi számelméleti kutatásokra.

BOLYAI írásai ugyanakkor ellentmondanak annak az általánosan elterjedt véleménynek, amely szerint ő mindig mély geometriai szemléletére támaszkodott, eredményei és eredeti gondolatai is mindig geometriai tartalmúak [1, 149 old.]. Számelméleti írásainak feltárásával legalább most, utólag belátjuk, hogy BOLYAIt kora matematikájának minden ága érdekelte, sokoldalú, eredeti tudós volt.

Eddig úgy tudtuk [110, 244 és 296 old.], hogy a magyar matematika a múlt század utolsó negyedéig nem tud felmutatni említésre méltó számelméleti eredményeket. Az első számelméleti feladatokkal foglalkozó dolgozatokat KŐNIG GYULA, RADOS GUSZTÁV, BAUER MIHÁLY közöltek. VÁLYI GYULA nagy érdeme, hogy a múlt században a Magyarországon elhanyagolt matematikai diszciplínának, a számelméletnek lelkes híveket toborzott.

Ha számba vesszük BOLYAI JÁNOSnak fentebbi eredményeit, akkor a magyarországi számelméleti kutatások kezdetét mintegy fél évszázaddal előbbre kell helyeznünk. Ezek valójában a két BOLYAI tevékenységével kezdődtek meg Magyarországon. A kéziratok tanúsága szerint BOLYAI FARKASt is érdekelték a számelméleti kérdések. Nemcsak biztatta fiát különböző számelméleti feladatok megoldására, de ő is próbálkozott ezekkel (4.7.§), ha nem is olyan sikeresen, mint János. A két BOLYAI számelméleti kutatásai azonban eddig nem váltak közkinccsé. Még a jóbaráthoz, GAUSShoz sem jutottak el. Kettejükön kívül senki más nem tudott ezekről, immár 140 éve. A Teleki Téka polcain hevertek napjainkig. Feltárva azokat elmondhatjuk, hogy az első magyar matematikus, aki a számelmélet terén jelentős eredményeket ért el: BOLYAI JÁNOS.

Valahányszor BOLYAI JÁNOS életére emlékezünk vagy munkásságáról szólunk, mindegyre felmerül apja, BOLYAI FARKAS neve is. Írásunk eddigi részében is állandóan tapasztaltuk, hogy ez a két név szorosan összefonódik. Valóban lehet-e BOLYAI FARKASra emlékezni anélkül, hogy Jánosra, a fiúra ne gondolnánk, és írhatunk-e Jánosról úgy, hogy közben az apáról megfeledkezünk?

Vérségi köteléken túl a nehéz tudóssors is egymáshoz láncolta őket, meg a két évezredes probléma, amelynek megoldásán fáradoztak. „Ezt a két embert – írja NÉMETH LÁSZLÓ – nemcsak példátlan heves apa-fiú viszony s az azonos és egymásra utaló foglalkozás kapcsolta össze, hanem egy és ugyanaz a probléma, az emberi agyban felmerültek közt tán a legmegdöbbentőbb, megoldásában a legcsodálatosabb". Idővel talán szertefoszlanak a kettejük viszonyát mindenképpen beárnyékolni szándékozók törekvései. Mert sajnos életük jelentéktelen eseményeiből az utókor jó néhány kutatója drámai színezetű tőkét kovácsolt. Szerencsére van, aki jól ismerve egész tevékenységüket, megérti kapcsolatukat s mélyrehatóan tudja elemezni azt. Valósággal felüdítenek VEKERDI LÁSZLÓ szavai: „A két BOLYAI – apa és fiú – nem holmi provinciális nyomorba süllyedt s kínjukban egymást tépő szerencsétlenek; alakjuk és sorsuk – gyönyörű levelekkel dokumentált harmóniájában – az európai gondolkozás főáramába tartozik, szervesen és kitéphetetlenül. Kihagyásuk az európai szellem egész történetét károsítja és hamisítja meg, ..." [123, 301 old.].

5

A prímtan

5.1. A Bolyai-kutatás egyik fehér foltja

A XIX. század első felében a komplex számok elméletének tisztázása a tudomány egyik központi kérdése volt, amelynek megvalósításához a legnagyobb hatással GAUSS munkái járultak hozzá. A paralelák mellett talán éppen a képzetes mennyiségek körüli titokzatosság volt az a probléma, amely mind a két BOLYAIt a legtöbbet foglalkoztatta. Levelezésükben gyakran fölmerült a komplex számok témája. Jánosnak és Farkasnak is megvolt a maga elmélete, amely sok tekintetben hasonlított egymáshoz, és amelyről időnként még szakmai vitáik is támadtak. „... *némely tárgyban ezelőtt mindketten szerfölött sokképpen lévén elfoglalva, elég értekezhetés* {megbeszélés} *hiánya miatt nem egészen egyeztünk meg, érdemlettűl, rendkívül és éppen különösön nagyon tisztelt Atyám* ..." – írja BOLYAI JÁNOS (646/1).

Alig néhány évvel BOLYAI JÁNOS halála után a Bolyaiak ügyének fáradhatatlan előharcosa, SCHMIDT FERENC temesvári, majd budapesti építész először ismerteti világnyelven a két Bolyai életrajzi adatait [100]. E cikk 228. oldalán SCHMIDT megemlíti, hogy BOLYAI JÁNOS foglalkozott a komplex számok elméletével. 1899-ben pedig PAUL STÄCKEL BOLYAI JÁNOS hátrahagyott írásaiból közzéteszi a Responsiót [104] és más olyan jegyzeteket, amelyekben BOLYAI a képzetes számokról ír, majd [106] könyvének II. kötetében is részletesen szól ezekről a munkákról [106:2, 239–249]. SCHMIDT FERENC és főképpen PAUL STÄCKEL írásainak köszönhetően tehát már régóta tudunk BOLYAI JÁNOSnak a komplex számok körében végzett mélyreható vizsgálatairól.

Azonban sem STÄCKEL, de az eddig megjelent egyetlen más Bolyai-monográfia szerzője sem említi, hogy BOLYAI JÁNOSt a komplex számok precíz értelmezése, szerkeszthetősége és geometriai rendszerében feltáruló szerepükön kívül, azok aritmetikája is érdekelte. Pedig kéziratainak szétszórt lapjai azt is elárulják, hogy ez a komplex számokkal kapcsolatban felmerülő érdekes probléma is igen élénken foglalkoztatta őt. Szinte hihetetlen, hogy BOLYAInak a komplex számok oszthatóságához fűződő eredményei eddig nem váltak ismertté. A következőkben a Bolyai-kutatásnak ezt a fehér foltját szeretnénk eltüntetni.

5.2. Gauss és a komplex egészek

A $\mathbb{Z}[i] := \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmazt, vagyis az olyan $a+bi$ alakú komplex számok halmazát, ahol a és b egész számok, a komplex egészek vagy Gauss-egészek halmazának nevezzük. Ez a halmaz, a modern algebra terminológiáját használva, a komplex számok összeadására és szorzására nézve egy euklidészi gyűrűt alkot. Ebben a gyűrűben kiépíthető a racionális számelmélet analogonja, vagyis a Gauss-egészek $\mathbb{Z}[i]$ gyűrűjében is beszélhetünk az oszthatóság, a maradékos osztás, a legnagyobb közös osztó, a prímekről és más fogalmakról, éppen úgy, mint a racionális egészek $\mathbb{Z}$ gyűrűjében [56, 97, 98, 102, 120].

A komplex egészek oszthatóságának elméletét GAUSS alapozta meg és fejlesztette ki. Tiszteletére nevezzük a komplex egészeket gyakran Gauss-egészeknek. Ő közölte először a komplex egész, komplex prím stb. fogalmakat. A Gauss-egészek körében is igazolta a számelmélet alaptételének megfelelőjét, és olyan kongruenciákat tárgyalt, amelyekben komplex számok szerepelnek. Munkájával a Disquisitiones arithmeticae-ben foglaltakat kiterjesztette a komplex egészekre is. Új prímszám-elmélet keletkezett, amelyben például a 3 mint komplex szám is prímszám, de ha az 5-öt komplex egésznek tekintjük, akkor az már nem prímszám, ui. például $5=(1+2i)(1-2i)$. Ez az új komplex számelmélet az aritmetika sok homályos pontját tisztázta, úgyhogy például a négyzetes reciprocitás tétele egyszerűbb lett, mint egész számok esetén [107].

GAUSS kutatásairól a Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda címmel tartott két előadásban számolt be Göttingenben a Királyi Tudós Társaság ülésén 1831. április 15-én és 23-án. Előadásainak tartalmát a [49] és [48] dolgozatokban publikálta. Mindkét előadás 1825-ben és 1828-ban a négyzetes maradékokról már megjelent dolgozatainak folytatása volt. A komplex egészek elméletének részletes kifejtését az első (ápr. 15-i) előadást ismertető [49] dolgozatban találjuk meg, míg a második (ápr. 23-i) előadás szövege [48] rövidebb, s ebben GAUSS – amellett, hogy a 632–638 oldalakon saját szavaival „kifejti a

képzetes mennyiségekre vonatkozó nézeteit" [101, 108–113 old.] – csupán emlékeztet néhány, a komplex egészekkel kapcsolatos fogalomra. Ez természetes, hisz egy héttel korábban ezekről már részletesen szólt. Most csak megismétli a komplex egész, a komplex prím, az összetett komplex egész értelmezését. Megemlíti, hogy a komplex egészek körében is megtaláljuk egy $a+bi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ komplex számra mint modulusra vonatkozó teljes maradékrendszer, az ún. legkisebb és legkisebb abszolút maradékok rendszere fogalmának $\mathbb{Z}$-beli analogonjait [97]. Kijelenti, hogy az $a+bi$ modulusra vonatkozó teljes maradékrendszer $a^2 + b^2$ elemből áll, s végül minden számítást mellőzve megjegyzi, hogy például az $1+2i$ modulusra vonatkozó legkisebb abszolút teljes maradékrendszer az 1, i, -1, $-i$ számokból áll.

Elgondolkoztató, hogy a második [48] előadás 1831-ben, míg az első [49] csak egy év múlva, 1832-ben jelent meg nyomtatásban. Mindenesetre jegyezzük meg ezeket az adatokat, mert alábbi fejtegetéseink során többször szóba kerülnek.

Mindkét előadás szövege természetesen megtalálható a GAUSS összes műveit tartalmazó kötetekben [50], az első előadás szövegét még az [51]-ben is fellelhetjük. A következőkben inkább ezekre a munkákra hivatkozunk, mert a [48] és [49] nehezebben hozzáférhetőek.

5.3. A komplex egészek aritmetikája Bolyai kézirataiban

A komplex egészek aritmetikáját GAUSStól függetlenül és körülbelül vele egyidőben BOLYAI JÁNOS is kidolgozta. Lehet, hogy ez a kijelentés túl merésznek tűnik, de bízunk abban, hogy a következőkben kellő érveléssel sikerül azt alátámasztani, s így a kételkedő olvasót is meggyőzni.

Bár próbálkozásairól BOLYAI nem készített összefüggő dolgozatot, mint GAUSS, de kéziratainak különböző oldalairól összegyűjtve a tárggyal kapcsolatos följegyzéseit, megállapíthatjuk, hogy a komplex egészek oszthatóságának minden alapvető problémájával foglalkozott ő is. Rendszerezve ezeket az írásokat világosan kirajzolódnak egy egységes elmélet körvonalai.

Elméletét BOLYAI JÁNOS *„prímtan"*-nak, ritkábban *„imaginárius számelmélet"*- nek (1134/1) nevezi.

Mindenekelőtt azt szeretnénk tisztázni, vajon mikor kezdte meg BOLYAI JÁNOS a komplex számokat vizsgálni. Ha megkérdezzük magát a zseniális matematikust, az ő válasza erre a kérdésre egészen egyértelmű. Apjának írt egyik levelében (740/1) mintha tudatosan erre a kérdésre válaszolna: „... *az imagináriusok*

tanát a maga helyén kerestem és meg is kaptam szerencsésen még 1831-ben." Vagy „*Az imaginárius mennyiségek tanát* – írja – *kis híján negyed évszázaddal ezelőtt, amikor az én igen fontos Tér Tudományommal foglalkoztam, már kigondoltam*" (587/1). Meggyőzőek a következő sorok is, amelyeket 1850 után iktatott a Responsio 9. paragrafusába: „*Igaz, hogy én éppen ezekben a vizsgálatokban, mikor e tárggyal majdnem egy negyed századdal ezelőtt foglalkoztam reájutottam a képzeteseknek igaz elméletére és ezt bővítettem, meg próbára tettem*" [106, 2:246].

Vallomásai alapján tehát állíthatjuk, hogy BOLYAI JÁNOS saját elméletét már az 1830-az évek elején, sőt még azelőtt is, az Appendix megjelenése előtti években (lásd „... *amikor az én igen fontos Tér Tudományommal foglalkoztam*") tisztán látta. Ismételten ezt igazolja az

$$\left(\frac{ac+bd}{cc+dd} \mathbin{\text{∔}} \frac{bc-ad}{cc+dd}\right)(c \mathbin{\text{∔}} d) = a \mathbin{\text{∔}} b$$

egyenlőség (ahol megjegyzése szerint $\text{∔}\, 1 = \sqrt{-1}$), amelyet egy, az 1825-ös esztendőre kinyomtatott újévi jókívánságokat tartalmazó papírlapon pillanthatunk meg latin szövegbe ágyazva (1546/1). S hogy BOLYAI ebben az időben az imagináriusok tanán nemcsak a komplex számok általános elméletét érti, hanem ugyanakkor a komplex egészek oszthatóságára is gondol, azt a következő, mondanivalónk szempontjából különösen fontos, németül írt följegyzése is elárulja: „*Kezdettől fogva éreztem annak szükségét, hogy az imaginárius számokat a számelméletbe is fel kell venni, vagyis ezekre is ki kell terjeszteni, s az óhajtott siker érdekében már régóta némely fontos vizsgálatot alkalmaztam. Nagy örömmel, meglepve olvastam a Göttingeni tudományos értesítőben ugyanezt a nézetet. Észrevettem, hogy* GAUSS *sem tudott megszabadulni ettől, és hogy ő ebben a tekintetben már nagyon nagy haladást tett. Mindazonáltal az ő nézete a komplex számok alapfogalmáról amit ő olyan magasra tart (amint levelében édesapámnak is megírta: ≪ ... ≫, akár az említett Gött. értesítőből is kiviláglik) még mindig nem világos, egyszerű és általában nem eléggé átható, kimerítő... Én ezzel a tárggyal is már körülbelül negyed évszázada teljesen tisztában vagyok. A maga részéről a Tentamen is szükségesnek ismerte el tekintetben venni az imaginárius...*" (982/8^v).

BOLYAI JÁNOS idézett jegyzete az 1850-es évekből való. Egy olyan nyomtatvány hátlapjára írta, amelynek első oldaláról az 185... év olvasható le. Följegyzésében GAUSS [48] cikkére utal, a zárójelben előforduló három pont – ≪ ... ≫ – pedig GAUSSnak BOLYAI FARKAShoz 1832. március 6-án írt levelét [101, 108–113 old.] idézi.

GAUSS [48] dolgozatához János csak 1833 után juthatott hozzá. Ugyanis ez 1833-ban még nem volt Marosvásárhelyen, mert a Tentamen második kötetének előszavában (1833-ban jelent meg) még ezt írja BOLYAI FARKAS: „addig kell tanítványaimnak előadnom {a komplex számokat}, míg amaz meg nem jelen" [106, 1:33]. Majd 1835. április 20-án köszöni meg GAUSSnak „az imagináriusokról szóló értesítést" {nem „hirdetést" [20, 186 old.]!} hozzátéve, hogy „Az imagináriusok későn jöttek, az én régi elgondolásom rég ki volt nyomva ...". Másrészt tudjuk azt is, hogy BOLYAI JÁNOS csak 1833 nyarán érkezett haza végleg Marosvásárhelyre.

Idézzük a Tentamen előszavából még a következő részt is: „Midőn pedig a tiszta képzeteseknek csakis saját meggyőződésem szerint értelmet tulajdonítani próbáltam, ..., még nem ismerkedtem a göttingai nagy férfiúnak (a Göttinger gelehrte Anzeigenben) már régebben kiadott képzetes mennyiségek alapvonalaival és egy időben ezeknek tárgyalására vonatkozó panaszával." [10]. GAUSS valóban panaszkodik [48, 632 old.], hogy még sokan nem barátkoztak meg az imaginárius mennyiségek természetével és egyes matematikusoknak ezekről hamis elképzeléseik vannak.

Már az eddig idézett sorokból is kiolvashatjuk, hogy BOLYAI JÁNOS önállóan, GAUSStól függetlenül és a Gött. gel. Anzeigen olvasása előtt kidolgozta elméletét a komplex számokról. De több más följegyzésében is félreérthetetlenül utal erre. Egy apjának írt igen bizakodó hangú levelében (800/1^v) beszél a készülő prímtanról. Nyíltan kimondja elméletének célját: „... *a készülő prímtannak* – írja – *bármely, tehát a Disquisitiones arithmeticaenek is bármely theorémáját procerto* {bizonyosan} *megmutathatni, problémáját resolválhatni és így erre nézve, az egész Disquisitiones arithmeticae-t zsebre tehetni* ...". Ugyanebben a levélben olvashatjuk: „*A prímek kirekesztő formulájának is már nincs kételyem, hogy még pedig rövid időn, sikerülnie kell, még pedig bármi idomúak legyenek*". Nyilvánvaló utalás arra, hogy nemcsak a racionális egész prímek, hanem a komplex prímek képletének megtalálásában is reménykedik ekkor. Ismét a Disquisitiones arithmeticae-re célozva jegyzi meg: „*Az imagináriusokat is belefoglalva, miről már* GAUSS *megint még csak nem is szól* „. Későbbi írásaiból még két helyről idézünk. A 800/3 lap egyik oldaljegyzetében kijelenti: „... *a prímek általam régóta az imagináriusokra is kiterjesztett elemi tulajdonságaiból* ...", 1853-ban [106, 1:256] pedig ezt írja: „*A szerző ... mint a képzetes és valós mennyiségek egész elméletének főpontjaihoz már sok évvel ezelőtt, más alkalommal eljutott,* ...".

Fentebb már rámutattunk arra, hogy GAUSS két dolgozatban, a [48] és [49]-ben közölte elméletét 1831-ben és 1832-ben. A rendelkezésünkre álló adatok, mint például GAUSS–BOLYAI FARKAS levelezése [101], BOLYAI JÁNOS kéziratos

hagyatéka, a könyvtárainkban fellelhető múlt századi folyóiratok tanulmányozása nyomán állíthatjuk, hogy BOLYAI csak GAUSS második előadásának tartalmát ismerte, azt, amelyik 1831-ben látott napvilágot a Göttingische gelehrte Anzeigenben. Erre az írásra maga GAUSS hívta fel BOLYAI FARKAS figyelmét a nevezetes (... ha fiadat dicsérem, akkor magamat dicsérem ...) 1832. március 6-án „régi felejthetetlen barátjához" intézett levelében: „... egyik kis dolgozatomban ... találhatod néhány oldalon kifejtve a képzetes mennyiségekre vonatkozó nézeteimnek lényegét is ... nem nehéz megszerezni ..." [101, 102 old.]. A folyóirat valamikor 1833 és 1835 (már idéztük: „az imagináriusok későn jöttek" – írja Farkas 1835. április 20-án) között eljutott Marosvásárhelyre (ma is megtekinthető a Teleki Tékában), de nincs meg a Commentationes soc. reg. sc. Götting. recentiores 1832-es száma (A Teleki Tékában az 1811-es évfolyammal szakad meg a sorozat, a kolozsvári könyvtárakban egyetlen példánya sem található). Így aztán GAUSSnak éppen az a dolgozata hiányzott és hiányzik ma is Marosvásárhelyen, amely első előadását ismerteti s amely a komplex egészek oszthatóságával kapcsolatos legfontosabb problémákat tartalmazza ([49], ill. [50]).

Ezért nem ismerhette BOLYAI JÁNOS teljes egészében a gaussi elméletet. Lehet ez az egyik oka annak is, hogy nem tartja kielégítőnek GAUSS munkáját, több bíráló megjegyzést fűz hozzá a fenti idézetben és a Responsióban is „*nem sértve e kitűnő férfit megillető tiszteletet*". Elég különös s nehezen megmagyarázható, hogy GAUSS miért csak a [48] írásáról értesíti BOLYAI FARKASt, amelyben a 632–638 oldalakon kifejtett nézeteinek „lényegén" a komplex számok ábrázolásával kapcsolatos problémákat érti, de a komplex aritmetika elméletének részletes kifejtéséről, vagyis a [49] dolgozatban foglaltakról a későbbiek során még csak említést sem tesz soha.

Nem tudjuk GAUSS hallgatásának okát, pedig BOLYAI FARKAS többször sürgette, hogy küldje el neki a képzetes mennyiségekről készült részletes munkáját. Mivel kérését GAUSS nem teljesítette, 1848. jan. 18-án már így panaszkodik: „Hosszan vártam imaginárius-teoriád kifejtésére, és már felhagytam minden reménnyel. Csak néhány héttel ezelőtt olvastam egy kis magyarhoni munkában, hogy megjelent MÜLLER Archiv der Mathematikja I. kötetének 4. füzetében, de semmi egyéb nem áll róla. Addig soha nem hallottam MÜLLER Archivjáról (penitus toto divisi orbe vagyunk), tegnapelőtt írtam Kolozsvárra, hátha valakitől megkaphatnám" [101, 129 old.], (3.1.§).

GAUSS már áprilisban ír BOLYAI FARKASnak és gondosan válaszol az előző levélben feltett kérdéseire. Csak a komplex számokról nem ír egy szót sem.

Mindezek alapján elhihetjük, hogy BOLYAI JÁNOSnak még 1848-ban, s amint a fent idézett, az 1850-es évekből való sorok is ($982/8^{v}$) tanúsítják, azután sem

lehetett tudomása GAUSS munkájának fontosabbik részéről. Különben kéziratos hagyatékának egyetlen lapján sem fedezhetjük fel annak nyomát, hogy ő olvasta volna a Commentationes folyóirat valamelyik számát. Pedig írásaiban valahányszor egy már ismert tételt vagy más ismert eredményt felhasznált, azoknak forrását mindig feltüntette. Jegyzeteiben sokszor hivatkozik, az oldalszámokat, paragrafusokat is megjelölve EULER, LAGRANGE, VEGA, GAUSS, BOLYAI FARKAS és mások műveire. „... *amit olyast már másutt láttam* – írja egy az 1850-as évek közepéről származó följegyzésén – *vagy máshonnan tudok ide fölvéve, beigazítva, mindig meg lesz említve: de minek tömege nem sokra menyen, alig teszi ki az egésznek* ..." (587/1).

Következésképpen eredetinek kell minősítenünk az általa megalkotott prímtant. Természetesen az írásbeli közlés elsőbbsége GAUSSt illeti, ugyanakkor a felfedezés önállósága BOLYAI JÁNOStól sem vitatható el. Annak az olvasónak pedig, aki még mindig fenntartással fogadja az eddigi érveket, úgy érezzük, eléggé meggyőző lesz BOLYAI és GAUSS munkáinak összehasonlítása.

A tárgyilagosság kedvéért azonban meg kell mondanunk, hogy BOLYAI elmélete nem olyan kimerítő, részletes, mint a GAUSS dolgozatában foglaltak. Jegyzeteiben nem találjuk meg több olyan fogalom értelmezését, amelyet viszont GAUSS megad, és a matematikusok azóta is használnak. Így például nem definiálja az „asszociált elem", egy komplex szám „konjugáltjának" és „normájának" a fogalmát. Számításaiból azonban világosan kiolvashatjuk egy komplex egész normája multiplikatív tulajdonságának a bebizonyítását (1190/19) és alkalmazásait, valamint azt a tételt, amely szerint ha az α komplex egész osztja a β komplex egészet, akkor az α normája is osztja β normáját (800/2). Ugyanakkor megfigyelhetjük azt is, hogy bizonyításai különböznek a GAUSS által alkalmazott eljárásoktól.

5.4. Bolyai komplex számokkal kapcsolatos elmélete

Mielőtt rátérünk a BOLYAI JÁNOS által elért eredmények ismertetésére, meg kell említenünk a komplex számokról írt dolgozatát, a Responsiót. Ebben az értekezésben BOLYAI a komplex számok aritmetikájával nem foglalkozik, bár az elmondottak szerint a Responsio megírása idején ennek is birtokában volt. A lipcsei Jablonowski Társaság pályázati kiírásában arra várt feleletet, vajon a geometriában előforduló komplex mennyiségek szerkeszthetőek-e? BOLYAI tehát nem tarthatta szükségesnek, hogy dolgozatában prímtanáról is beszámoljon.

Érdemes felfigyelnünk BOLYAI FARKAS egyik 1844 körül írt levelére, amelyben kiadási terveiről tájékoztatja Jánost és közreműködésre szólítja fel: „... hátha Magad költségén, az enyimnek végére az imagináriumok theoriáját ... oda

tennéd?" [17, 394 old.]. Ebből a mondatból nem derül ki, hogy Farkas a Responsióra gondolt-e – amelyet János időközben visszakért Lipcséből és 1842-ben visszakapott – vagy a prímtanra. Tény, hogy BOLYAI 1844-ben komolyan fontolgatta, hogy *„haladék nélkül"* kiadjon egy *„kis terjedelmű munkát"*. Tervét Domáldról írta meg apjának (7.2.§). Itt olvashatjuk azt is, hogy a komplexekről *„tökélyes és teljes tanomat is nemsokára szándékozom közre-bocsátani"* (445/4^v). Farkas valószínűleg ezután kínálja fel fiának a közreműködést. Nem ismerjük János válaszát, de ha megfogadja apja tanácsát, az Appendix mellett még életében megjelenhetett volna nyomtatásban második munkája is. Igaz, ez is csupán egy „függelék" lett volna. Hogy BOLYAI valóban tervezte egy munka kiadását a komplex mennyiségekről, azt más alkalommal is megerősíti: „*. . . az eddigelé célszerütlen, illetlen, sületlen, helytelen, időtlenűl úgy nevezett ≪képzelt nyik≫* {képzetes mennyiség}*-rőli tökélyes tanomat is egyébaránt egyebütt közrebocsátani szándokló . . .*" (399/3^v). Nem kedvelte a *„képzelt"* kifejezés használatát sem LOBACSEVSZKIJ geometriájának, sem a komplex számok megnevezésénél. Miután megállapítja, hogy az *„Euklid-ellenes űrtan* {nemeuklidészi geometria} LOBACSEVSZKIJ*nél képzelt űrtan"* hozzáteszi: *„mi utóbbi nevet azonban úgy nem helyeselhetem, szerethetem, kedvelhetem, . . ., fogadhatom el, mint a ∔ nyiknek képzelt-nyik nevét"* (1188/1^v) – s ezt azzal indokolja meg, hogy a „∔1 *és* ∸1 *becseinek . . . éppen úgy lényt lehet és kell megfeleltetni*", mint a pozitív és negatív mennyiségeknek (445/4^v).

Később – 1846-ban – János azt tanácsolja apjának, hogy a komplex számok terén végzett kutatásairól kérjék ki *„más elismert derék belátású s itéletű s jó ízlésű tanászok itéletét (például egy* GAUSS*ét)"*. (739/1). De aztán végül is nem fordultak GAUSShoz. Mit is válaszolhatott volna akkor GAUSS? Bizonyára sem Farkasnak, sem Jánosnak nem lett volna öröme benne.

Most pedig vizsgáljuk meg BOLYAI JÁNOSnak a komplex egészek körében végzett munkáját.

1. BOLYAI JÁNOS kutatásaiban a prímszámok – akár a racionális egész, akár a komplex prímek – végig központi helyet foglaltak el. Írásainak számos lapján felbukkannak a prímszámokra vonatkozó jegyzetei. Néha csupán egy-egy rövid megjegyzést vet papírra, máskor hosszabban értekezik róluk. A téma nem hagyja nyugton, mindig vissza-visszatér rá.

A prímszámok megnevezésében is megnyilvánul BOLYAI JÁNOSnak a pontosságra, szabatosságra való törekvése. Mivel vizsgálódásai során ezek különböző típusaival találkozott, érzi, hogy nem elég, ha mindegyiket egyszerűen csak prímnek nevezi. Arra törekedett, hogy elnevezésükkel is világosan megkülönböztesse egymástól a prímszámokat aszerint, hogy azok a racionális egészek, vagy

a komplex egészek gyűrűjében, vagy egy időben mind a két gyűrűben is prímek. Itt is szokása szerint új, egyéni elnevezéseket alkot, néha ugyanarra a fogalomra többet is.

A racionális egész prímeket, azaz a ± 2, ± 3, ± 5, $\pm 7, \ldots$ számokat legtöbbször *főszámok*nak nevezi, de előfordulnak még az *előszámok*, *a szűkebb értelemben vett prímszámok* és *edi-számok* elnevezések is (németül Haupt Zahl-nak, de a $4m+1$ alakú prímeket megkülönböztetésül a többiektől Haupt-Primzahl-nak mondja). Azokat a számokat, amelyek a komplex egészek gyűrűjében prímek, mint például az $1+i$, $1+2i$, $2-3i$, $6-i, \ldots$ számok *tökélyes prímek*nek, azokat pedig, amelyek mind a racionális egészek, mind a komplex egészek gyűrűjében is prímek, mint például a 3, 7, 11, ... (a $4m+3$ alakú prímszámok) számok, *abszolút prímek*nek nevezi.

Megemlítjük még, hogy azokat az $a+bi$ komplex számokat, ahol sem a, sem b nem nulla egész számok, *elegyes* vagy sokszor *vegyes számok*nak, ha pedig a vagy b nulla, akkor *tiszta számok*nak nevezi.

BOLYAI JÁNOS kézirataiṅak különböző lapjairól kiolvashatjuk, hogy a komplex egészek gyűrűjében világosan felismerte a prímeket. Akárcsak GAUSS [51, 543 old.], ő is megállapítja, hogy a komplex prímek:

a) az $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ számok (1265/40),

b) a $4m+3$ alakú racionális prímszámok ($1446/10^v$),

c) a $4m+1$ alakú racionális prímszámok komplex tényezői ($1466/10$ és 10^v).

Bár BOLYAI nem hangsúlyozza külön, de egy komplex prím asszociáltjait is mindig tudatosan prímeknek tekinti. Nem értelmezi, mint GAUSS, egy elem asszociált elemének a fogalmát, viszont kijelenti (1265/40 és $495/2^v$), hogy ha $z \in \mathbb{Z}[i]$ prím, akkor nyolc osztója van: ± 1, $\pm i$, $\pm z$, $\pm iz$.

Vizsgáljuk meg rendre, hogy mit mond ezekről a számokról BOLYAI JÁNOS?

a) Azt, hogy az $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ számok „*tökélyes prímek*" az 1265/40 oldalon egyszerűen csak felsorolja BOLYAI, a 621/1 oldalon pedig megjegyzi, hogy $2=(1+i)(1-i)$, de $1+i \neq (\ )\cdot(\ )$, amivel félreérthetetlenül jelzi, hogy $1+i$ nem írható fel két komplex egész szorzataként. Állítását nem indokolja. Valószínűleg ezt az egyébként nyilvánvaló tényt nem tartotta szükségesnek még külön bizonyítani is.

b) A $4m+3$ alakú racionális prímszámokról BOLYAI JÁNOS több módon is bebizonyítja, hogy „*abszolút prímek*" (vagyis mint komplex számok is prímek).

Így például egyik bizonyítása: „*Ha a p prímszám* $4m+3$ *alakú, akkor* $p=t^2+$ $+u^2$ *nem lehetséges, mert ha t és u egyszerre páros vagy páratlan, akkor négyzeteik összege páros lenne, ami nem prímszám, ha pedig t és u közül egyik páros, a*

másik páratlan szám, akkor ezek négyzeteinek összege $4m+1$ *alakú szám lenne. Tehát p abszolút prím*" (1190/9).

Pontosan ezt a gondolatmenetet olvashatjuk mai tankönyveinkben is [103, 313 old.].

Egy másik bizonyítás: „*Egy* $4m+3$ *alakú valós prímszám soha sem osztható egy* $p+qi$ *alakú számmal. Ha másképp volna, akkor annak* $p-qi$*-vel, azaz ezek szorzatával vagyis* p^2+q^2*-tel is oszthatónak kellene lennie ami csak akkor lehetséges ha maga* $4m+3=p^2+q^2$ *lenne. Ez viszont lehetetlen, mert csak* $4m+1=p^2+q^2$". ($1129/1^v$).

c) Azt, hogy a $4m+1$ alakú racionális prímek két konjugált Gauss-prím szorzatára bomlanak, BOLYAI JÁNOS egy kis cédulán (1446/10) a következőképpen fogalmazza meg: „$a+bi$ *idomú* {alakú} *tökélyes gyök prímszámok persze vannak: milyek a* $(4m+1)$ *prímszámok faktorai* {tényezői}". Aztán megmutatja, hogy ha $p=(a+ib)(c+id)$, akkor $p=a^2+b^2=c^2+d^2$, ahonnan $a+ib=c-id$ következik (1436/2), vagyis ha a szűkebb értelemben vett p prímszám két komplex egész szorzata, akkor azok egymásnak konjugáltjai kell legyenek. Ezután bebizonyítja, hogy ha $p=(m+ni)(m-ni)$, akkor $m+ni$ prím. Tételezzük fel, hogy az $m+ni$ komplex egésznek van egy ±1, $\pm i$-től különböző $r+si$ komplex egész osztója. Akkor, mivel

$$\frac{m+ni}{r+si}$$

komplex egész, következik, hogy az $\dfrac{m^2+n^2}{r^2+s^2}=\dfrac{p}{r^2+s^2}$ is egész. Mivel itt $r^2+s^2\neq1$, ezért $r^2+s^2=p$, ami azt jelenti, hogy

$$\frac{m+ni}{r+si}\cdot\frac{m-ni}{r-si}=(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2=1,$$

vagyis $\dfrac{m+ni}{r+si}=\pm1$ vagy $\pm i$, ahonnan $m=\pm r$, $n=\pm s$ vagy $m=\pm s$, $n=\pm r$ következik, azaz $m+ni$ prím ($1431/1^v$). Tulajdonképpen BOLYAI itt azt mutatja ki, hogy az $m+ni$ komplex egésznek az asszociáltjain kívül más osztója nincs, amennyiben $p=m^2+n^2$ prím.

A $4m+1$ alakú racionális prímeknek ezt a tulajdonságát BOLYAI kapcsolatba hozza FERMAT két négyzetszám tételével is. Ezt írja: „*Minden* $4m+1$ *alakú p prímszám két imaginárius prímszám szorzata, mivel minden ilyen szám két egész szám négyzetének összege*" (1389/21, $1333/1^v$).

Ugyanezzel a kérdéssel még több, más oldalon is találkozunk (1190/1, 1232/3, 3^v, $1348/4^v$, $594/2^v$).

2. BOLYAI JÁNOS foglalkozik a komplex egészek egyértelmű prímfelbontásával.

Nem értelmezi ugyan a komplex szám normájának a fogalmát – amit GAUSSnál a BOLYAI által nem ismert dolgozatban megtalálunk –, de azért anélkül, hogy megnevezné, mindig alkalmazza, amikor szüksége van rá. A bizonyításai ezáltal néha nehézkesebbé, hosszabbá válnak a kelleténél.

Az egyértelmű prímfelbontásról szóló tételt az 1407/3^v és 1431/1 oldalakról olvashatjuk ki: „*Minden* $a+bi$ *alakú szám (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelműen felbontható véges számú prímek szorzatára*".

A bizonyítás érdekében először megmutatja, hogy minden $a+bi$ komplex egész számot legalább egy komplex prímszám oszt. Tételezzük fel, hogy az $a+bi$-nek osztója a tőle különböző $c+di$ szám, vagyis

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

komplex egész. Akkor $\frac{a-bi}{c-di}$ is egész, ahonnan következik, hogy $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ is egész.

Nyilván nem lehet $c^2+d^2>a^2+b^2$, sem $c^2+d^2=a^2+b^2$. Ennélfogva

$$c^2+d^2<a^2+b^2.$$

Ha most $c+di$ egy prímszám, akkor állításunk igaz. Ha nem, akkor éppen úgy, mint előbb, létezik egy $e+fi$ komplex egész, amely osztója $c+di$-nek, és

$$e^2+f^2<c^2+d^2.$$

Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg egy $p+qi$ prímszámot kapunk. Természetesen megjegyzi, hogy az

$$a^2+b^2>c^2+d^2>e^2+f^2>\dots$$

sorozat véges (1431/1^v), továbbá azt is, hogy „*az* $a+bi$*-nek elegy-osztója* {komplex-osztója} *csak az* a^2+b^2 *real* {egész} c^2+d^2 *idomú osztójának (ha* $c,d\neq 0$*) decompositiojából eredhet: mi az előbbi szerint csak egyként eshetvén, világos, hogy az imaginárokat admittálva is bármely számnak csak véges számú mérője* {tényezője} *lehet... tehát... bármely számot a rendre nem tekintve csak egyként... ugyanazon prímekre szaggathatni* {tényezőkre bontani}. *És a leg-> köz-osztója bármely, tehát elegyes számnak is megtaláltatik prímekre szaggatás által*" (800/2, 1333/1^v).

Itt arra is gondol BOLYAI, hogy a komplex számok esetén a „*legnagyobb közös osztója*" helyett más elnevezést kellene bevezetni, mivel „*a* $>$, $<$ *nek az elegyeseknél per se* {persze} *nem lévén értelme*".

3. BOLYAI JÁNOS több alkalommal kijelenti és számelméleti tételeinek bizonyításainál alkalmazza a következő tételt: ha az a komplex egész osztja a $(b+$ $+di)(b-di)$ szorzatot, akkor a-nak van két olyan e és f tényezője, hogy e osztója $b+di$-nek, f pedig $b-di$-nek.

„*Már szükséges és tudom is azon theorémát az imaginárokra is kiterjeszteni* – írja a 495/1^{v} oldalon –, *miszerint, ha egy a szám két szám faktumát* {szorzatát} *osztja, mint itt a* $(b+di)(b-di)$*-t, úgy van a-nak oly két factora e, f, melyek közül az egyik az előbbi két factor egyikét, a másik a másikát osztja*". Ugyanez a mondat ismétlődik szinte szóról szóra a 800/3 oldalon azzal a bevezetéssel, hogy mindez „. . . *már a prímtanból (minek okát* {bizonyítását} *itt rövidségért el kell hagynom) bizonyos* . . . ".

Az 1332/1 oldalon ezt olvashatjuk: „*Ismésképp* {ismeretes} *van olyan x reális szám, hogy* $\dfrac{x^2+1}{p}$ *egész legyen* {itt $p=4m+1$ alakú}. *De* $x^2+1=(x+i)(x-i)$ *tehát az imagináriusokra is (per se szigorú demonstrációk mellett) kiterjesztett prímtanból lennie kell oly móddal* $p=ef$*-nek, hogy* $\dfrac{x+i}{e}$, $\dfrac{x-i}{f}$ *egészek legyenek. Sem e, sem f tiszta nem lehet, mert ha egyik tiszta, úgy a másik is nyilván az, de akkor a fölsöbbeni 1-t mindeniknek osztania kellvén, nyilván mindenik csak* $\subset \sqrt[4]{1}$ $\{\pm 1, \pm i\}$ *lehetne: mily két szám egymértje* {szorzata} *pedig soha sem lehet* $=p$".

Sajnos a kéziratokban nem sikerült BOLYAInak ezekre a „*szigorú demonstrációira*" rábukkanni, csupán egy befejezetlen próbálkozására találunk a 800/3 oldalon.

4. A komplex egészek $\mathbb{Z}[i]$ gyűrűjében a kongruenciák elméletét is kidolgozhatjuk. GAUSS ezt az elméletét az [51, 534–586 old.] dolgozatában fejtette ki részletesen, de néhány fogalomról – amelyekről írásunk első felében már szóltunk – röviden a [48] dolgozatban is említést tesz. A komplex számok kongruenciájával BOLYAI JÁNOS is foglalkozott és ezen a téren is több figyelemre méltó megállapítást tett. Eredményeit önállóan érte el, hisz a [48] munkában csak néhány olyan fogalomról olvasott, amelyeket ő már előbb kigondolt, s amint már többször hangsúlyoztuk, nem ismerte GAUSS [49] dolgozatát. GAUSS munkája összefüggő, több paragrafusból felépített írás, BOLYAI viszont elég rendszertelenül, különböző papírlapokra jegyezte le gondolatait („*bár én itt semmit se járok*

correct conceptus (rendszerező összefoglalás) után, nyakra főre sietve" –vallja be a $800/1^{v}$ oldalon).

A kéziratos hagyaték $1190/18^{v}$ és 1190/19 oldalain BOLYAI is meghatározza, akárcsak GAUSS, de más úton, azt az $e+fi$ komplex számot, amelyre adott $a+bi$ és $c+di$ mellett

$$c+di \equiv e+fi \pmod{a+bi}.$$

A feladatot a következő elemi számításokkal oldja meg. Az adott kongruencia így írható

$$c-e+(d-f)i \equiv 0 \pmod{a+bi},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\frac{c-e+(d-f)i}{a+bi}=\frac{a(c-e)+b(d-f)+[a(d-f)-b(c-e)]i}{a^2+b^2} \text{ egész,}$$

azaz

$$a(c-e)+b(d-f) \equiv 0 \pmod{a^2+b^2}$$

és

$$a(d-f)-b(c-e) \equiv 0 \pmod{a^2+b^2}.$$

Léteznek tehát olyan h és k egész számok, hogy

$$a(c-e)+b(d-f)=(a^2+b^2)h,$$
$$a(d-f)-b(c-e)=(a^2+b^2)k.$$

Innen

$$ae=ac+b(d-f)-(a^2+b^2)h,$$
$$be=bc-a(d-f)+(a^2+b^2)k.$$

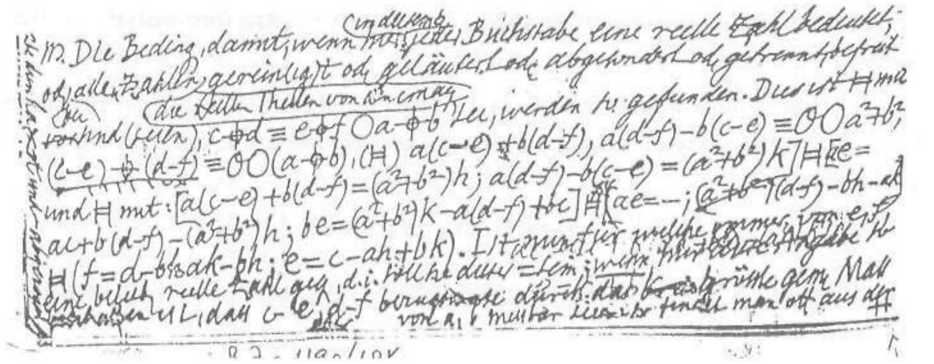
Most ha az egyenlőségek közül az elsőt a-val, a másodikat pedig b-vel szorozzuk és összeadjuk a szorzatokat

$$e=c-ah+bk.$$

Ha pedig az első egyenlőséget b-vel szorozzuk, a másodikat pedig a-val szorozva kivonjuk az elsőből, akkor

$$f=d-ak-bh.$$

Így tehát meghatároztuk az $e+fi$ komplex számot s ugyanakkor még azt is észrevehetjük, hogy a $c-e$ és $d-f$ különbségek oszthatóak a és b legnagyobb közös osztójával (**11. ábra**).



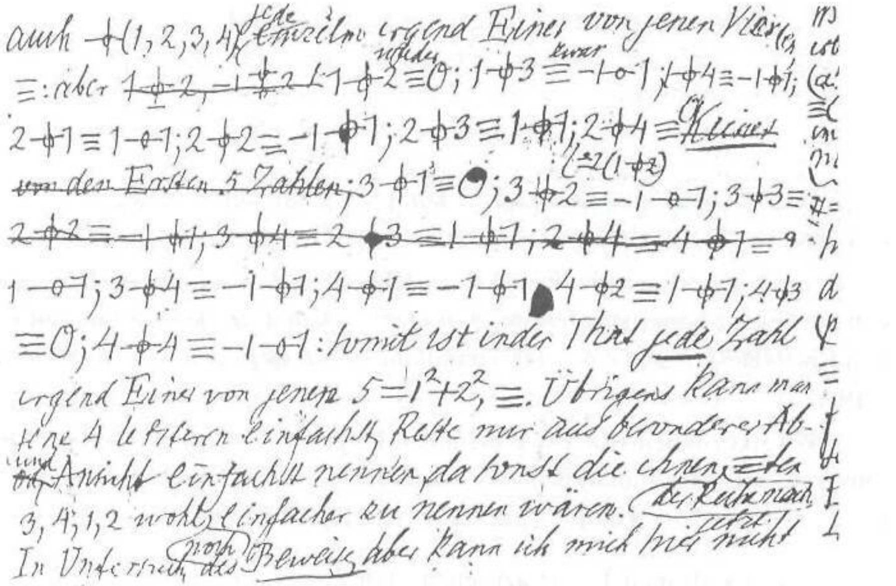
11. ábra (1190/18^v)

GAUSS is természetesen ugyanahhoz az eredményhez jut a [51] 43.§-ban, megállapítva még, hogy a legkisebb maradékok elemei a 0 és a^2+b^2-1, a legkisebb abszolút maradékok elemei pedig a $-\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ és $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ határok közé esnek. A 44.§-ban megmutatja azt is, hogy egy adott modulusra (példaként az $5+2i$ modulust tárgyalja) nézve miképpen szerkeszthetjük meg ezeket a maradékokat.

BOLYAInál is több helyen megtaláljuk azt az észrevételt, hogy az $a+bi$ modulusra vonatkozóan egy teljes maradékrendszer a^2+b^2 elemből áll (pl. 1134/1), amit különben a [48]-ban is olvasott. (Bizonyos komplex számokról – akár az egész számok esetében – akkor mondjuk, hogy egy teljes maradékrendszert alkotnak modulo egy adott $a+bi$ komplex egészre, ha páronként inkongruensek modulo $a+bi$, és minden komplex szám kongruens a rendszer valamelyik elemével modulo $a+bi$.)

BOLYAI JÁNOSnál szintén találunk egy példát. Megállapítja, hogy az $1+2i$ modulusra vonatkozó legkisebb maradékrendszert a 0, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ komplex egészek összessége alkotja. „*Ha jól emlékszem* – írja ezzel kapcsolatban – GAUSS *példaként az* $1+2i$ *moduluszt vezeti be és azt állítja, hogy a teljes maradékrendszer csak az* $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ *számokból áll. De hol marad a nulla maradék? Alig hiszem, hogy az óvatos és körültekintő* GAUSS *ennyire szembeötlő hibát követett el. Ezt a bajt a nyomdásznak vagy a korrektornak tulajdonítom*" (1193/7). Más helyen (1190/20^v) megjegyzi: „*... Azt, hogy ezt a négy komplex számot miért nevezte abszolút legkisebb maradéknak, még nem tudom*".

BOLYAI ezúttal nem emlékszik pontosan. GAUSS a [48] cikkében, amint már láttuk, valóban az $1+2i$ modulust említi példaként, de nem az erre vonatkozó



12. ábra (1193/7^v)

legkisebb maradékrendszert, hanem a legkisebb abszolút maradékok teljes rendszerének elemeit, az 1, i, -1, $-i$ elemeket, sorolja fel.

A továbbiakban (1193/7 és 1193/7^v) annak igazolására, hogy a 0, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ számok egy teljes maradékrendszert alkotnak modulo $1+2i$, BOLYAI először is kimutatja, hogy ennek a rendszernek tetszőleges két eleme nem kongruens egymással modulo $1+2i$ (felírja, hogy $-1+i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 1+2i)$, $-1-i \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\ 1+2i)$, $1+i \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 1+2i)$, $1-i \equiv 4 \,(\mathrm{mod}\ 1+2i)$), aztán pedig tekinti a következő 15 komplex egészet:

$$1+2i, 1+3i, 1+4i, 2+i, \ldots, 2+4i, 3+i, \ldots, 3+4i, 4+i, \ldots, 4+4i$$

és számítással igazolja, hogy ezek mindegyike kongruens maradékrendszerének valamelyik elemével modulo $1+2i$.

Számításait valószínűleg fejben végezte el, mert jegyzetében (1193/7^v) csak egyszerűen felsorolja a kongruenciákat (**12. ábra**). Könnyebb olvasásért néhányat részletesebben is felírunk:

$$1+2i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 1+2i), \quad \text{mert} \quad 1+2i = 1(1+2i),$$
$$1+3i \equiv (-1-i) \,(\mathrm{mod}\ 1+2i), \quad \text{mert} \quad 2+4i = 2(1+2i),$$
$$1+4i \equiv (1-i) \,(\mathrm{mod}\ 1+2i), \quad \text{mert} \quad 5i = (2+i)(1+2i),$$

$$2+i \equiv (1-i) \pmod{1+2i}, \quad \text{mert} \quad 1+2i = 1(1+2i),$$

$$\vdots$$

$$4+4i \equiv (-1-i) \pmod{1+2i}, \quad \text{mert} \quad 5+5i = (3-i)(1+2i).$$

A felsorolásból kimaradt az $1+i$ komplex szám, ami érthető, hisz $1+i \equiv 1+ +i \pmod{1+2i}$, továbbá az $1+4i$ esetén egy elírás történt.

BOLYAI a módszeresen felsorolt példákból arra következtetett, hogy bármely komplex egész kongruens lesz rendszerének valamelyik elemével modulo $1+2i$. Majd hozzáteszi: „*A bizonyítás vizsgálatát most még nem tudom véghezvinni*" ($1193/7^v$).

A következőkben BOLYAI gondolatait kiegészítve röviden vázoljuk ezt a bizonyítást, vagyis kimutatjuk, hogy bármely $m+ni \in \mathbb{Z}[i]$ kongruens a 0, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ komplex egészek valamelyikével modulo $1+2i$.

a) $m+ni \equiv 0 \pmod{1+2i}$ azt jelenti, hogy $\dfrac{m+ni}{1+2i} \in \mathbb{Z}[i]$, vagyis $\dfrac{m+2n+(n-2m)i}{5} \in \mathbb{Z}[i]$.

b) $m+ni \equiv 1+i \pmod{1+2i}$ azt jelenti, hogy $\dfrac{m+2n-3+(n-2m+1)i}{5} \in \in \mathbb{Z}[i]$. Hasonlóképpen

c) $m+ni \equiv 1-i \pmod{1+2i}$-ből $\dfrac{m+2n+1+(n-2m+3)i}{5} \in \mathbb{Z}[i]$,

d) $m+ni \equiv -1+i \pmod{1+2i}$-ből $\dfrac{m+2n-1+(n-2m-3)i}{5} \in \mathbb{Z}[i]$,

e) $m+ni \equiv -1-i \pmod{1+2i}$-ből $\dfrac{m+2n+3+(n-2m-1)i}{5} \in \mathbb{Z}[i]$ következik.

Könnyen beláthatjuk, hogy

1) $m+2n = 5k \Leftrightarrow n-2m = 5h$,

2) $m+2n = 5k \pm 1 \Leftrightarrow n-2m = 5h \mp 2$,

3) $m+2n = 5k \pm 2 \Leftrightarrow n-2m = 5h \pm 1$,

aminek alapján azonnal következik, hogy az a) – e) esetek közül valamelyik bármely m és $n \in \mathbb{Z}$-re fennáll.

BOLYAI JÁNOSnak azok a jegyzetei, amelyekben a komplex egészek kongruenciájával foglalkozik, későbbi keletűek. Hivatkozásaiból láthatjuk, hogy amikor ezeket papírra vetette, már olvasta GAUSS [48] munkáját, de nem valószínű, hogy

ötletét onnan merítette volna. Amint előbb már láthattuk, BOLYAIt éppenséggel meglepte, amikor a Gött. gel. Anzeigenben olvasta, hogy nézeteit GAUSS is felismerte. Jegyzetei mindenesetre többet tartalmaznak a kongruenciákról, mint GAUSS [48] írása.

BOLYAI abban az igyekezetében, hogy a számelmélet fogalmait a komplex számokra is kiterjessze, fölveti az összes komplex tökéletes szám meghatározásának kérdését is. Két helyen is (495/1 és 800/1$^{\text{v}}$) följegyezte szinte ugyanazt a mondatot: „*A már* EUKLID *által vizsgált tökélyes számok, a tan gyermek-korában, azon (tudtomra ugyan sem a Régiek, sem az újabbak által még csak nem is érintett) hozzátétellel, hogy minden oly szám megadódjék (⊹ is)*" {komplex is}.

Ötletét nem részletezi. Egyike lenne ez is azoknak a „*legderekabb eszmék*"-nek, amelyeket „*nyakra, főre sietve*" nem dolgozott ki? BOLYAI minden bizonnyal a tökéletes számok ismert definíciójának a komplex egészekre való alkalmazására gondolt. Írásaiból azonban nem derül ki, hogy ezt miképpen képzelte el.

5.5. Befejező gondolatok

Reméljük, hogy az elmondottakban sikerült bemutatni BOLYAI JÁNOSnak a komplex egészek körében végzett vizsgálódásait és elért eredményeit. Szándékunk az volt, hogy felszínre hozzuk BOLYAInak azokat a munkáit is a komplex számokról, amelyeket a matematika története eddig még nem ismer. Szükséges tehát kiszélesítenünk ismereteink körét s ezután a Bolyai-mű szerves részéhez tartozónak tekintenünk a komplex egészek aritmetikáját is.

A komplex számok BOLYAInál a geometriában is fontos szerepet játszanak. Szerinte „... *az (úgynevezett) képzetes mennyiségeknek igen kiváló alkalmazása* ..." van, mert segítségükkel „... *az egész (a XI. axiómától független) tértudományt lehetőleg egyszerűen és kényelmesen adhatjuk elő,* ..." [106, 1:101]. A Responsio 9.§-ban közli a hiperbolikus trigonometria

$$\sin i\frac{a}{k} = \sin\alpha \sin i\frac{c}{k} \quad \text{és} \quad \cos i\frac{c}{k} = \cos i\frac{a}{k}\cos i\frac{b}{k}$$

($i=\sqrt{-1}$) képleteit, amelyek az a és b befogókkal, valamint a c átfogóval rendelkező derékszögű háromszögekre vonatkoznak, ahol α az a befogóval szemben fekvő szöget, k pedig a hiperbolikus állandót jelenti, megemlítve, hogy a hiperbolikus trigonometria formailag megegyezik a $\frac{k}{i}$ sugarú gömb trigonometriájával. Ezzel az észrevétellel azt óhajtotta igazolni, hogy az i képzetes egységnek fontos, addig ismeretlen geometriai alkalmazása tárult fel az ő rendszerében.

BOLYAI JÁNOS nemcsak kidolgozta a komplex számok elméletét, számára fontosak voltak ennek alkalmazásai is. A komplex egészekre vonatkozó megállapításait nagyszerűen felhasználta különböző számelméleti tételek bebizonyításánál. Így például a $4m+1$ alakú prímszámok két négyzet összegére való felbontásának tételét a komplex egészek segítségével bizonyította be több módon is (4.5.§). Ugyancsak a komplex egészeket alkalmazva bizonyítja a következő tételt: ha a összege két racionális szám négyzetének, akkor két egész szám négyzetének is összege (495/1).

BOLYAI JÁNOS gondolt az analízis fogalmainak a komplex számokra való kiterjesztésére is. A 759/3 oldalon egy rövid megjegyzése olvasható: „*NB. d-s* $\int$ *-tant* {differenciál- és integrálszámítást} *is elegy nyikre* {komplex mennyiségre} *is ki kell s lehet terjeszteni*". Az 1537/2 oldalon egy még rövidebb írás: „$\int_{m+in}^{p+iq}$ *-nak is van értelme, de* $\int^{p+iq}$ *nem illő jel*".

Megismételjük a P. STÄCKEL [106, 1:255] által idézett következő följegyzést: „*Hogy valamely határozott integrál határai mennyiben lehetnek képzetesek, vagyis mennyiben terjeszthető ki képzetes határokra, ... tudtommal még senki sem vizsgálta meg. Itt most meg akarom mutatni, hogy a* ∂ *és* $\int$ *-tan miként és mennyiben terjeszthető ki a képzetes mennyiségekre. Ha* $n = f(x, y, z, \ldots)$, *akkor először is* $p+iq$, $r+is$, ..., *–t tehetjük* x, y, ... *helyébe, minek következtében* $v+iV = g(p, q, r, s, \ldots)+ih(p, q, r, s, \ldots)$, $v=g$, $V=h$, $dv = \frac{\partial v}{\partial p}dp + \frac{\partial v}{\partial q}dq + \ldots$, $dV = \frac{\partial V}{\partial p}dp + \frac{\partial V}{\partial q}dq + \ldots$, $d(v+iV) = dv + idV = \ldots$ *Másrészt, minthogy a konvergencia miatt a* ∂*-tan könnyen képzetes növekményekre is érvényesíthető, az* x *növekménye* $\Delta p + \Delta q$." Itt, fájdalom, vége szakad ennek a följegyzésnek.

Akik BOLYAI JÁNOS kéziratos hagyatékának tanulmányozására vállalkoztak, valahogy eddig nem figyeltek fel azokra a jegyzetekre, cédulákra, amelyekről kibetűzhetjük a komplex aritmetikát tartalmazó írásokat. (STÄCKEL sem biztat, sőt inkább lebeszél BOLYAI ilyen természetű vizsgálatainak kutatásáról, amikor megjegyzi: „Jánosnak szándéka volt, hogy a képzetes mennyiségekre vonatkozó tanának bővített és javított kidolgozását is készítse el, melynek fontosságát egyenlőrangúnak tartotta az abszolút geometriájéval. De amit ebből nyújt, csak szélesre taposott fejtegetése olyan gondolatoknak, melyeket már régebben szűkszavúan ... adott elő; tárgyilag új alig van benne." [106, 1:176]). Talán nem

is csodálkozhatunk ezen, hiszen olvasásukat, mint különben a többi kéziratlapét is, megnehezítik a Bolyai-féle jelölések, elnevezések. Első látásra az olyan szavak, mint „*tökélyes*"-, „*elegyes*"- vagy „*edi*"- számok érthetetlennek tűnnek az olvasónak. Ezeket csak több kéziratlap összehasonlítása után fejthetjük meg. Nehézséget okoz az is, hogy legtöbbször más-más oldalakon találjuk meg az egy gondolathoz tartozó jegyzeteket. Amint már említettük, az elmondottakat mi is csak különböző kézirat-mozaikokból tudtuk összeállítani.

6

Az algebrai egyenletek elmélete

6.1. Az algebrai egyenletek megoldhatóságáról

Egy adott algebrai egyenlettel kapcsolatban felmerülő legfontosabb feladat megoldásainak (gyökeinek) megkeresése. Többféle módon és többféle eszközzel lehet egyenleteket megoldani. Ezek között különleges szerepet tölt be az ún. algebrai megoldás módszere.

Valamely algebrai egyenlet algebrai megoldásán olyan eljárást értünk, amely az egyenlet gyökeit annak együtthatóiból kizárólag a négy alapművelet, a hatványozás és pozitív egész kitevőjű gyökvonás véges sokszor való alkalmazásával adja meg. Ezt úgy is szoktuk mondani, hogy az algebrai egyenletek megoldásánál az elsőrendű cél egy általános megoldó- vagy gyökképlet megadása. Ez egy olyan algebrai úton nyert kifejezés, amelynek összes értéke és csak ezek az adott egyenlet gyökei.

Az algebrai egyenletek megoldhatóságának kérdése egyike a matematikatörténet jelentős problémáinak, amely századokon át foglalkoztatta, izgalomban tartotta a legkiválóbb matematikusokat. Ezek sorába tartozott SCIPIO del FERRO (1465?–1526), G. CARDANO (1501–1576), L. FERRARI (1522–1565), N. TARTAGLIA (1500–1577), J. L. LAGRANGE, I. NEWTON (1643–1727), L. EULER, J. D'ALEMBERT (1717–1783), E. W. TSCHIRNHAUS (1651–1708), C. F. GAUSS, P. RUFFINI (1765–1822), N. ABEL, E. GALOIS. BOLYAI JÁNOS kéziratos hagyatékának átvizsgálása azt mutatja, hogy ezt a hosszú névsort az ő nevével is ki kell egészítenünk.

Az a kérdés, hogy az algebrai egyenletek algebrailag megoldhatóak-e, a reneszánsz korában került előtérbe. Az első- és másodfokú egyenletek megoldási

módszerét lényegében már a régi babiloniaiak is ismerték. A harmad- és negyedfokúak megoldása gyökképlettel csak a tizenhatodik században sikerült olasz matematikusoknak. Az itáliai matematikusok sikerei mély hatást eredményeztek. A modern idők tudománya először haladta jelentősen túl az antik és az arab matematikát. Nem létezett ezután egyetlen jelentős matematikus sem, aki ne próbálta volna folytatni az olaszok eredményeit és velük analóg módon algebrailag megoldani az ötöd-, hatod- és magasabb fokú egyenleteket. Ezek az erőfeszítések azonban sorra kudarcot vallottak.

Az évszázadok előrehaladtával mind több és több matematikus fejében megfordult, hogy talán nem is létezik megoldóképlet az ötöd- és magasabb fokú egyenletekhez. A vélemények viszont ebben a tekintetben megoszlottak. LAGRANGE például kételkedett az ötödfokú egyenlet megoldhatóságában, sejtésként kimondta, hogy az ötöd- és annál magasabb fokú egyenletek nem oldhatóak meg algebrailag. EULER viszont úgy vélekedett, hogy a négynél magasabb fokú egyenleteket is meg lehet algebrailag oldani. TSCHIRNHAUS azt hitte, hogy általános módszert talált az egyenletek megoldására. A kérdést végül is a 18. század végén és a 19. század elején sikerült tisztázni.

Először P. RUFFINI a Teoria Generale Delle Equazioni kétkötetes könyvében, 1799-ben jelentette ki azt a tételt, hogy az ötöd- és magasabb fokú egyenletek általában nem oldhatóak meg algebrailag. Bizonyítása azonban hiányos volt, és így még nem döntötte el véglegesen a problémát. 1826-ban N. ABEL hibátlan gondolatmenettel bebizonyította a tételt. Pedig 1820-ban még ő is úgy vélte, hogy megtalálta az ötödfokú egyenlet megoldóképletét. ABEL az éppen akkor induló Crelle-féle folyóirat első számában, a 65–84 oldalakon közölte dolgozatát, de nem tudott arról, hogy volt már egy elődje. Később azonban értesült RUFFINI munkájáról. Egy 1828-ból származó s csak halála után megjelent kéziratos följegyzésén ezt olvashatjuk: „Ha nem tévedek, előttem csak egyedül RUFFINI próbálta meg az általános egyenletek algebrai megoldásainak lehetetlenségét bebizonyítani, de az ő munkája olyan bonyolult, hogy nehéz megítélni érveléseinek helyességét" [26, 321 old.].

RUFFINI és ABEL tevékenységének elismeréseként ezt a fontos algebrai tételt róluk nevezték el.

ABEL cikkével az egyenletek megoldásának problematikája még nem zárult le. Ugyanis számos olyan négynél magasabb fokú egyenlet létezik, amelyik algebrailag megoldható. A Ruffini–Abel-tétel szükségessé tette egy fontos elméleti kutatás megindítását: mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy adott egyenlet algebrailag megoldható legyen. Ennek a problémának a tisztázása sem váratott sokáig magára. Egy igen fiatal matematikus, E. GALOIS adott rá pontos választ.

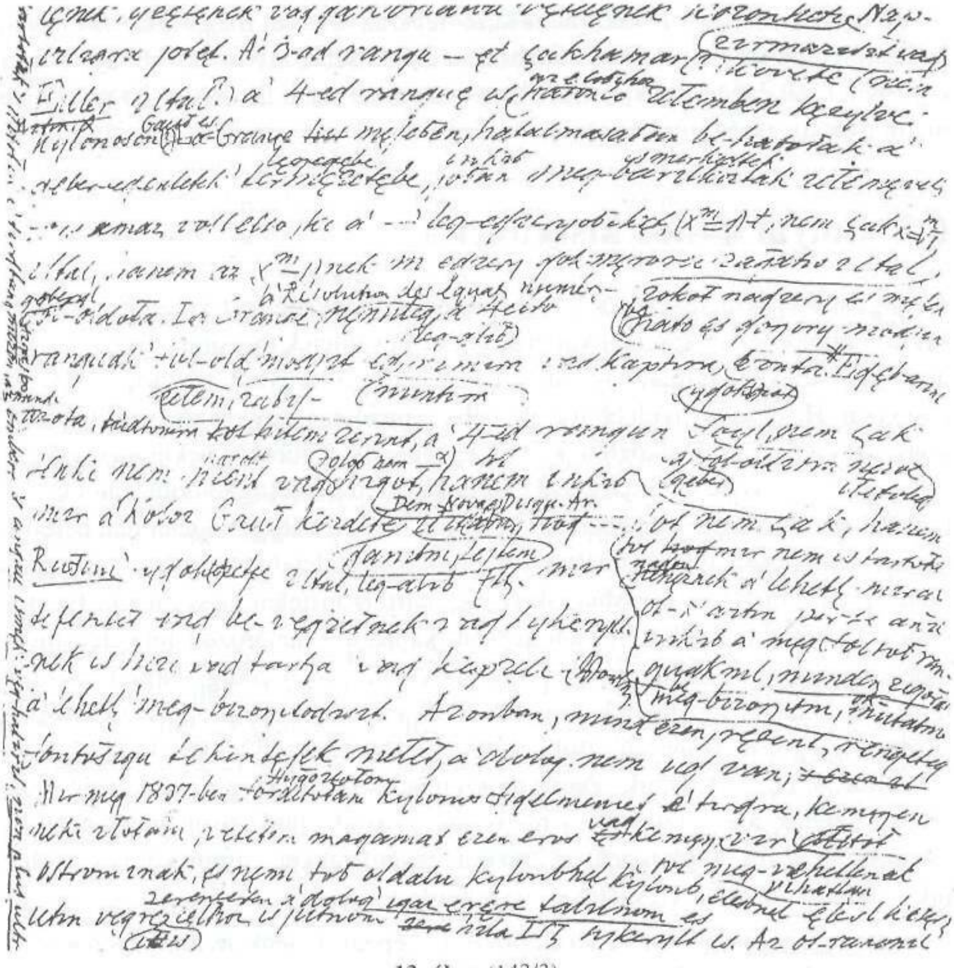
Ezzel a közel három évszázados küzdelem, az ötöd- és magasabb fokú egyenletek megoldóképletének a felkutatására eldőlt. Bebizonyosodott, hogy ezek az egyenletek általában gyökjelekkel nem oldhatóak meg. Kiderült, hogy a matematikusok olyasvalamit kerestek, ami nem létezik.

6.2. Bolyai János kísérletei

Az algebrai egyenleteket BOLYAI JÁNOS nagy szenvedéllyel vizsgálta. Amint a kéziratokból kiviláglik, ő is sokat vívódott az egyenletek megoldhatóságának kérdésével. Eddig feltáratlan hagyatéka igen gazdag a tárgykörhöz tartozó följegyzésekben. Hosszabb-rövidebb írások, néha csupán egy-egy megjegyzés tanúsítja, hogy élete végéig foglalkoztatták őt az egyenletek. Többször nekigyürkőzik *„újból elévéve s nekifogva"* e tárgynak. Nem készített összefüggő dolgozatot erről a témáról sem, s a leggyakrabban nem találjuk megkezdett gondolatainak befejező részeit. Különösen akkor sajnáljuk ezt, amikor nagy lendülettel induló és merész címet viselő írást nem olvashatunk végig, mert az hirtelen megszakad. Ilyenformán a kéziratokból sok kérdésünkre nem kaphatunk határozott feleletet, mégis érdemes ezeket a vizsgálódásokat számba venni, mivel eddig semmit sem tudtunk Bolyainak az egyenletek megoldhatóságára vonatkozó próbálkozásairól, s e kérdésre még a legismertebb Bolyai-monográfiákban is [32, 106, 112, 127] legfeljebb csak utalás történik. Pedig ha szerencsénk van, elég néhány száz oldalt átböngésznünk a kéziratokból s máris meggyőződhetünk arról, hogy nemcsak „szándékában állt" foglalkozni az algebrai egyenletekkel – amint eddig olvashattuk –, hanem valóban vizsgálta is ezt a kérdést.

A följegyzésekből és töredékekből tiszta kép tárul elénk ez irányú törekvéseiről. Kiolvashatjuk belőlük, hogy sok ideig bizonytalan úton járva az ötödfokú, sőt a tetszőleges fokszámú algebrai egyenletek megoldását is keresi (erről, bizonyára STÄCKEL nyomán a [85] is említést tesz), majd ráébredve tévedéseire ő is eljut a Ruffini–Abel-tételig.

BOLYAI JÁNOS már aradi szolgálata idején (1826–1830) készített néhány följegyzést (1.2.§) a magasabb fokú egyenletek megoldásával kapcsolatosan, de nagyobb lendülettel csak 1837-ben, Domáldon kezd a témával foglalkozni. Két olyan írás is létezik, amely erre vonatkozóan eligazít. Az egyik saját vallomása. *„Már még 1837-ben* – írja egy később keletkezett szövegben – *fordítottam különös figyelmemet e tárgyra, keményen neki állottam, vetettem magamat ezen erős vagy kemény sőt megvíhatatlan vár ostromának, és némi több oldalú különbnél különb, élesebbnél élesebb úton végre itt is szerencsésen a dolog igaz erére találnom és célhoz is jutnom hála Isten sikerült is"* (143/3) (**13. ábra**). A másik



13. ábra (143/3)

írás apjának, BOLYAI FARKASnak BOD PÉTERhez intézett és 1837. június 20-án kelt levele, amelyben többek között ezt olvashatjuk: „A fiam azt mondja, hogy a 5^{ta} gradus aequatiot generaliter rezolválta, megmutatván az impossibilitas demonstratioja hibáit {célzás RUFFINI pontatlan bizonyítására}; sőt kiterjesztette a még felsőbbekre is: még nem küldötte el hozzám, de igérte, hogy elküldi, várom talán holnap" [11, 268–269 old.].

Ezek szerint BOLYAI JÁNOS 1837-ben már Domáldon valóban foglalkozott a magasabb fokú egyenletek megoldásával. Farkas leveléből azt is megtudjuk, hogy ekkor még bizonytalan úton járt. 1837-ben azt közölte apjával, hogy sikerült megoldania az ötödfokú, sőt a magasabb fokú algebrai egyenleteket is. A „megoldást" biztosan nem küldötte el másnap, amint ígérte.

Tehát amikor BOLYAI JÁNOS az ötöd- és ennél magasabb fokú egyenletek megoldására vonatkozó gondolatait papírra veti, a matematikusok már ismerik a Ruffini–Abel-féle tételt. Erről, valamint GALOIS munkásságáról azonban BOLYAI a későbbi évek során sem értesül. Különös módon a BOLYAI FARKAS és GAUSS közötti levélváltásokban [101] sehol sem találunk az algebrai egyenletek megoldhatóságára (sem számelméleti problémákra) való utalást. A témát BOLYAI FARKAS nem veti fel, pedig jól tudta, hogy János kutatja ezt a kérdést.

Vajon milyen forrásból értesült a nagy geométer az algebra egyik alapvető problémájáról? Olvasmányai közül melyek hatására kezdte meg az algebrai egyenletekkel kapcsolatos vizsgálódásait? Mit tudott és mit nem munkája kezdetén az algebrai egyenletek megoldhatóságáról? A kéziratokat vizsgálva választ kapunk mindezekre a kérdésekre.

BOLYAI JÁNOS minden bizonnyal már édesapjától hallhatta, hogy az ötödfokú egyenlet algebrai megoldása még nem ismert (a Tentamenben megtaláljuk a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldását), de matematikatörténeti olvasmányaiban is találkozhatott ezzel a problémával. Nem kétséges viszont, hogy leginkább GAUSS, ANDREAS von ETTINGSHAUSEN (1796–1887) és LAGRANGE műveinek tanulmányozása váltotta ki belőle azt az elhatározást, aminek eredményeképpen keményen nekiállott *„ezen erős ... vár ostromának"*.

Jól ismerte nemcsak GAUSS Disquisitiones arithmeticae című könyvét, de a Demonstratio nova ... kezdetű doktori értekezését is, amelyben a még egészen fiatal matematikus 1799-ben szigorú bizonyítását adta a klasszikus algebra alaptételének. Nagyon sokszor emlegeti jegyzeteiben A. ETTINGSHAUSEN 1827-ben Bécsben kiadott kétkötetes Vorlesungen über die höhere Mathematik című könyvét. Ebben a munkában a szerző egy teljes fejezetet szentel a négynél magasabb fokú egyenletek megoldhatatlanságának, s közli RUFFINI erre vonatkozó 1799-es bizonyítását. (Az 1827-ben kiadott könyvbe még nem kerül(hetet)t be ABEL 1826-os dolgozata). E munkák mellett BOLYAI még gyakran idézi LAGRANGE [81] művét, amely azzal a alapvető kérdéssel foglalkozik, hogy a négynél alacsonyabb fokú egyenletek megoldására használt módszerek miért nem alkalmazhatók négynél magasabb fokú egyenletek esetén. Így jutott el LAGRANGE a gyökök racionális függvényeihez és a gyökök permutációja esetén tanúsított viselkedésükhöz. Ez nemcsak RUFFINInek és ABELnek az ilyen irányú vizsgálódásait ösztönözte, hanem ebből származott GALOIS csoportelmélete is [107, 142 old.].

BOLYAI így ír olvasmányairól: *„Hogy pedig a 4-nél fölsőbb rangú geber* {algebrai} *egyenletek geber föloldását még egy Gaussi Nagyság is mily lehetlennek hiszi és tartja: elég világos fényben kitűnik remek Demonstratio nova-ja 9.§-ában, s a kolosszális Disquisitiones arithmeticae-je 645 lapjáni hatalmas és*

heves nyilatkozatából, hol némileg meg is igéri ... a lehetlenségnek már az 5-rangra, tehát annyival inkább a még fölsőbb rangokra nézve ... bizonyítást adni: mit RUFFINI *a derék* ETTINGSHAUSEN*ben is meglévőleg, elmésen ugyan, de egy csomó hibával, egyszóval tehát csak képzeltképpen meg is tett*" (710/2^v).

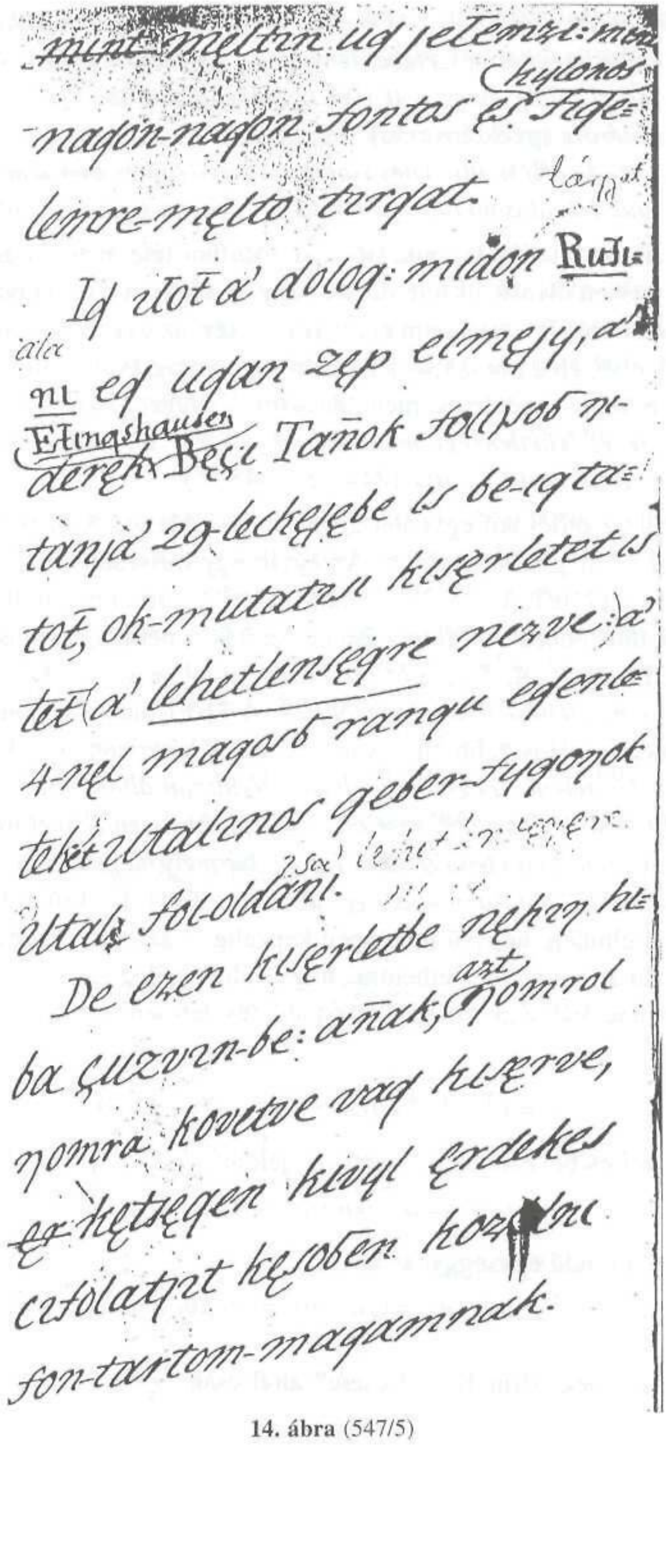
Egy másik, valószínűleg később keletkezett, hosszabb és összefüggő írása már bizakodóbb, mintha látná a megoldást: „*... jelenleg csak a geber vagy algebrai egyenletekről szólok, azokat sem tevén egész kiterjedésében vizsgálatom tárgyává, hanem csak annyira terjeszkedvén, ... , hogy világuljon ki az: hogy az eddig lehetlennek tartott, sőt, némely ... derék nagyérdemű nyiászok* {matematikusok} *képzeltképpen vagy hiedelmük szerint lehetlennek is bizonygatott legfontosabb e tárgy körüli kérdést, tudniilik bármely megadott vagy határozott rangú egyenlet gyökeinek a szorzók* {együtthatók} *általi kitételét, vagyis az egyenlet föloldását ... A Lipcsében 1799-ben kijött Demonstratio nova remek munkájában* GAUSS *illő szigorral legelőbb mutatta meg azt, hogy minden geber egyenlet valóban ki is elégíthető ... Ezen mestermű 9.§-ában így szól a Nagy-Tiszteletű Szerző Úr: csekély remény maradt hátra a géber egyenletek általános (geber) föloldására. És hogy tán nem volna oly nehéz minden szigorral megbizonyítani a lehetlenséget már az 5-rangúra nézve: miről vizsgáit másutt előadni is igéri ... Nem több reménnyel nyilatkozik ... a Disquisitiones arithmeticae 645. lapján így szólván magyarrá fordítva vagy átírva: Áll vagy bizonyos az, hogy a legnagyobb nyiászok minden igyekezete a 4-et fölülmúló rendű egyenletek megfejtését ... megtalálni mindeddig sikertelen volt és alig marad kétely fönn aziránt, hogy ezen feladat nem annyira az üd-tan* {egyenletek elmélete} *erejét múlja fölül, mint inkább valami lehetlent foglal magában ...*

Így állott a dolog amikor RUFFINI *... okmutatási* {bizonyítási} *kisérletet tett a lehetlenségre nézve: a 4-nél magasabb rangú egyenleteket általános géber függönyök* {függvények} *által föloldani. De ezen kísérletbe néhány hiba csúszott be: azt nyomról nyomra követve vagy kísérve kétségen kívül érdekes cáfolatját későbben fönntartom magamnak.*" (547/1-547/5) (**14. ábra**).

„*A* RUFFINI *oka, bizonyja a ... lehetlenségről erőtlen vagy rossz, vagy csak képzelt ...*" (143/2^v).

„RUFFINI *ügyöközetje által, legalább* ETTINGSHAUSEN *már ... sikerültnek is hiszi ... vagy képzeli a lehetlenség megbizonyítódását. Azonban, mind ezen, részint rengeteg fontosságú tekintélyek mellett a dolog nem úgy van*" (143/3).

Mit olvasott ki BOLYAI JÁNOS LAGRANGE általa ismert műveiből? Íme néhány mondat: „*a derék* LAGRANGE *164.§-os alján és 166.§végén nem csak nehéznek, hanem tán éppen lehetlennek tartja a szóbanforgó tárgy eldöntését ...*"


~~mint~~ meltan ugy jelemzi: mon
kylonos
nagyon-nagyon fontos es Figye=
lemre-melto targyat.
Igy itot a' dolog: midon Ritsi=
alc
ni egy ugyan szep elmejy, a'
Ettingshausen
derek Beçi Tañok follysob ni-
tanja' 29-leckejebe is be-igta=
tot, ok-mutatasi kiserletet is
tet a' lehetlensegre nezve: a'
4-nel magasb rangu egyenle=
teket altalanos gyeber-fyggonyok
altal fol-oldani.
De ezen kiserletbe nehany hi=
ba çuzvan-be: annak, azt, nyomrol
nyomra kovetve vagy hi-szerve,
egy-hetsegen kivyl erdekes
czafolatyat kesoben kozleni
fon-tartom-magamnak.

14. ábra (547/5)

(26/3^v). „*Különösön* GAUSS *és* LAGRANGE *mélyebben, hatalmasabban behatoltak a geber egyenletek természetébe, lényegébe, jobban megbarátkoztak, ismerkedtek szellemével, főleg amaz volt első ki a legegyszerübbiket* $(x^m = 1)$*-t ... m egyszerű gyökmérőre* {gyöktényezős} *szaggatás* {fölbontás} *által ... géberül föloldotta.* LAGRANGE *a Résolution des équations numériques-ben némileg legalább a 4 első rangúak föloldásmódját egy mintára, rámára, kaptára vonta*" (143/3).

Amint nyilatkozataiból kitűnik, BOLYAI a Ruffini-tétel bizonyítását ETTINGSHAUSEN könyvében olvasta és felfedezte, hogy ez a bizonyítás hiányos. Ebből arra következtetett, hogy a tétel nem érvényes, s ezért az egyenletekkel való foglalatosságainak első, elég hosszú szakaszában nagy energiával látott hozzá a négynél magasabb fokú egyenletek megoldásához. „*Megcáfolásával egy (*RUFFINI *által) az ilyettevés lehetlensége mutatásának ... egy új úton eo ipso* {magától értetődően} *megmutattatik*" – írja 1844-ben (445/3^v).

Megkísérli az ötödfokú egyenlet „*geber*" megoldását. A hagyatékban több, erre vonatkozó följegyzést találunk. Az egyik egy hosszabb (befejezetlen) dolgozat első része (710/1, 1^v, 2, 2^v). Amint a 710/2^v lap alján található őrszóból következtethetünk ennek volt folytatása is. Az írás címét magabiztosan, nagy betűkkel írja le BOLYAI: „*Az 5 azaz öt-rendű vagy ötöd rangú geber egyenlet geber föloldása vagy megfejtése útja vagy módja.*" (A 710/1 oldal fényképét megtaláljuk a [127]-ben is). Hosszabb címe van egy másik kísérletének: „*A Föld Eddigi Leg-Nagyobb Tiszteletű s Leg-Colossalisabb Nyiászjai által Lehetlennek Tartott, vagy A Föld-Gömb Nyiászjaitól ez-előtt, sőt képzeltképpen Némelyek által lehetlennek is bizonygatott minden rendű és rangú, bármely megadott algebrai egyenleteknek algebrai föl-oldása módja vagy útja.*" (1297/1). Ezekről a lapokról nem derül ki egyértelműen, hogy ő miképpen képzelte el az ötödfokú egyenlet megoldását, csupán arra következtethetünk, hogy valószínűleg LAGRANGE hatására a gyökök permutációját, a „*körcserét*" vizsgálja részletesen. Azt írja, hogy ha a, b, c, d, e az

$$X = x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

egyenlet gyökei és bevezetjük a következő jelölést

$$(abcde) = a + I_5 b + I_5^2 c + I_5^3 d + I_5^4 e,$$

ahol I_5 az 5-öd rendű egységgyök, akkor

$$(abcde)^5 = (bcdea)^5 = (cdeab)^5 = (deabc)^5 = (eabcd)^5,$$

vagyis $(abcde)^5$-nek bármely „körcsere" által csak $\frac{120}{5} = 24$ különböző értéke lehet.

Sajnálhatjuk, hogy nem találjuk a terjedelmes dolgozat folytatását. Jóllehet a címben kitűzött célt nem érhette el, de tanulságos volna annak a mozzanatnak az olvasása, amelyben rádöbbent saját tévedésére.

Egy másik próbálkozásában BOLYAI a másod- és harmadfokú egyenletek ismert gyökképleteinek analógiája alapján felírja az ötödfokú egyenlet „megoldási képletét" (775/2).

Megemlítjük még egy hosszabb dolgozatának érdekes címét, amelyet valószínűleg életének egy későbbi szakaszában jegyzett föl: „*Egy régi kísérletem a 5-ik rangú általános geber-egyenleteknek* csakugyan megfoghatatlan csodámra, hogy ezt rég észre nem vettem midőn szinte éppen ennél, e helynél régóta oly nagyon közel jártam {a nem dőlt betűvel írt rész a kéziraton áthúzva} *geber föloldása, vagyis bármely 5-rangú egyenletnek általános geber föloldása módjára*" (1309/5).

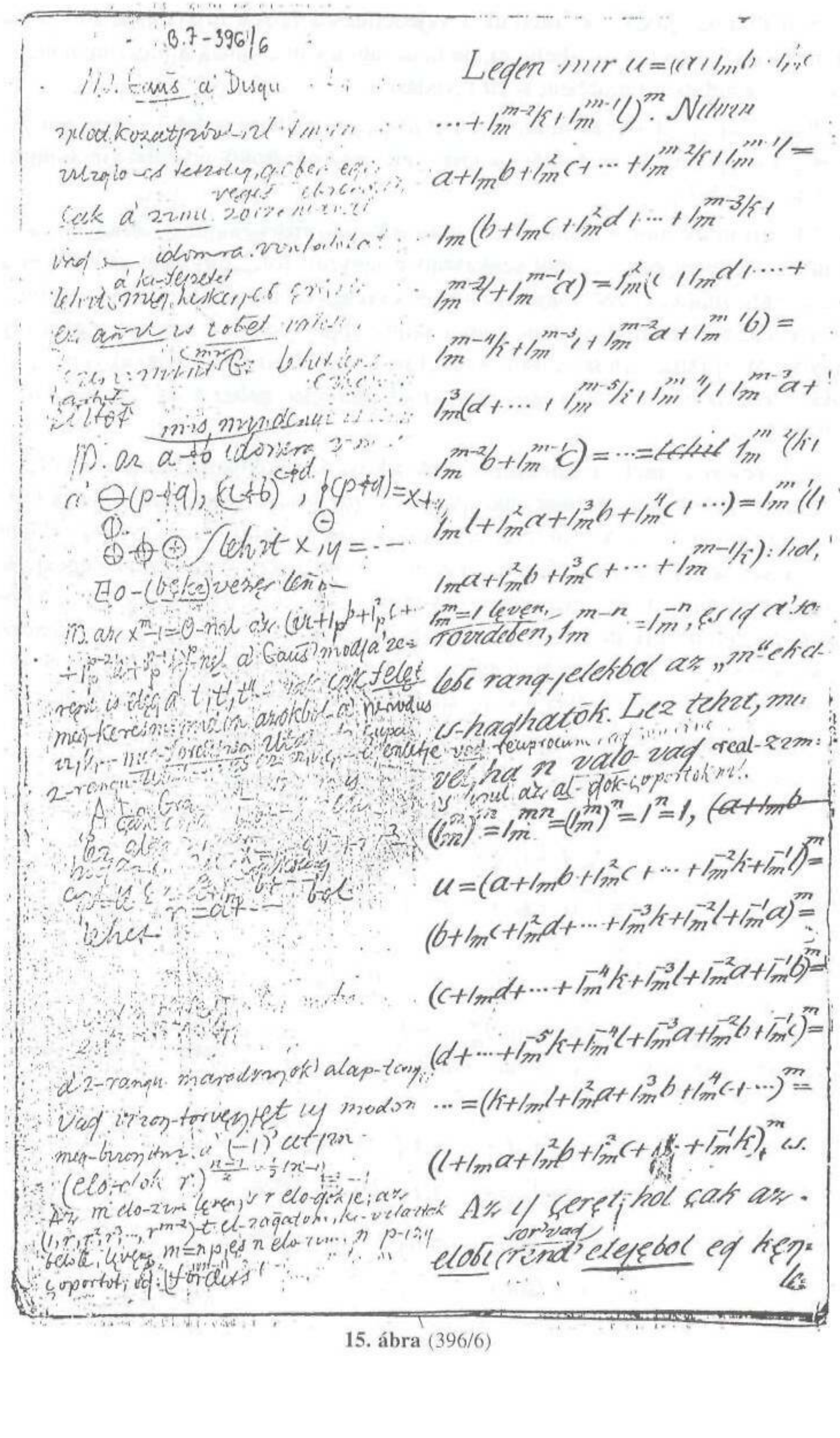
A *körcserét*, amelyet fent említettünk a következőképpen értelmezi BOLYAI: „. . . *ha a gyökök vagy bármely más elemek körbe íródva gondoltatnak vagy képzeltetnek, úgy hogy az utolsó az első mellé és elejébe essék: csak az egész előbbi sor, vagyis az előbbi rendnek minden eleme, bizonyos kényleges* {tetszőleges}, *de mindenik elemre nézve ugyan-azon-egy-számú hellyel és ugyan-egy-felé odébbtaszítódik: az íly cserét mondom ≪ körbeni csere ≫*, . . . , *vagy legrövidebben ≪ kör-csere ≫, vagy kevésbé szépen és jól hangzólag ≪ tasz-cseré ≫-nek nevezendem.*" ($396/6^v$). Vagyis a körcsere nem más mint a cirkuláris permutáció.

Megállapítja (396/6), hogy ha I_m az m-ed rendű egységgyök, akkor

$$\begin{aligned}
&a+I_m b+I_m^2 c+\ldots+I_m^{m-2}k+I_m^{m-1}l=\\
&=I_m(b+I_m c+\ldots+I_m^{m-2}l+I_m^{m-1}a)=\\
&=I_m^2(c+I_m d+\ldots+I_m^{m-2}a+I_m^{m-1}b)=\\
&=\ldots\ldots\ldots\\
&=I_m^{m-1}(l+I_m a+\ldots+I_m^{m-1}k)
\end{aligned}$$

hol, mivel $I_m^m=1$, rövidebben $I_m^{m-n}=I_m^{-n}$, „*és így a fölebbi rang-jelekből* {kitevőkből} *az „m"-ek el is hagyhatók. Lesz tehát* . . . $(I_m^n)^m=I_m^{mn}=(I_m^m)^n=$ $=1^n=1$, *s*

$$\begin{aligned}
u&=(a+I_m b+\ldots+I_m^{m-2}k+I_m^{m-1}l)^m=\\
&=(a+I_m b+\ldots+I_m^{-2}k+I_m^{-1}l)^m=\\
&=(b+I_m c+\ldots+I_m^{-2}l+I_m^{-1}a)^m=\ldots\\
&=(l+I_m a+\ldots+I_m^{-1}k)^m."
\end{aligned}$$



15. ábra (396/6)

Ezeket az észrevételeket a tetszőleges fokszámú algebrai egyenletek vizsgálatánál próbálta hasznosítani, nyilván sikertelenül (**15. ábra**). Mert az ötödfokú egyenlet megoldásán túl kísérleteinek első szakaszában merészebb tervei voltak. Kereste a bármilyen fokszámú algebrai egyenletek megoldását is. Megkezdte egy írásának megfogalmazását, amelynek címe: „*General Auflösungs-Methodes aller algebraischer Gleichungen*" (396/5^v). De a bevezetésen túl nem jutott, nem juthatott.

Magyarul is megfogalmazta egy másik dolgozatát, amelyik így kezdődik: „*A nem csak az 5, azaz öt vagy ötöd, hanem minden, vagy bármely rendű vagy rangú geber vagy algebrai egyenleteknek geber föloldása vagy megfejtése útja vagy módja*" (703/1). Ebben a dolgozatban találjuk meg a fenti u kifejezést (703/6^v).

BOLYAI még mindig abban a hitbel él, hogy „nyomozásai"-val minden algebrai egyenlet megoldását megtalálja, amikor papírra veti az örökös „bajlódásai"-t tükröző következő sorokat: „*N.B. E tájt is csakhamar észrevettem, vagyis ide is elhatottam s némileg eljártam s szinte már célnál is voltam, még csak egy lépés kellett volna: azonban mint gyakran, sok más tárgy és találmányoknál gyakran szokott történni, hogy néha még egy kis továbblépésre is évszázadok kívántatnak, midőn egy finomabb körülményt még akkor elején nem vévén észre, éppen nem útközben talált hasznos aratás vagy gyümölcsök nélkül a főcélra nézve azonban csakugyan sikertelenül vagy hiába bajlódva s járva el, kisértgetve bármi fortély vagy műfogások által, az áthatlannak látszó föltűnő (merülő) nehézség előtt darabig, ideig magam is végre részint, de még sem egészen reményvesztetten ideig visszahökkentem, visszatértem vagy föl- vagy annyiban hagytam. Később újból elévéve s nekifogva e tárgynak előbb azt gyanítottam, hogy az általános 5-rangú egyenletek géber föloldása csakugyan lehetséges: minek eldöntése vagy tisztába hozása, hozatalára is sok vizsgákat, nyomozásokat tettem a nélkül csakugyan, hogy e célt elérnem sikerült volna.*

Később azonban még annál is > kincsre tettem szert, többet találtam: ugyanis félre hárítva vagy legyőzve vagy eltüntetve minden akadályokat vagy nehézségeket az áthatolhatatlannak tartott és ... fal itt van rontva és porítva, a Herkules-oszlopok ledöntvék, ontvák, az általános tágasb értelemben geber, bármely megadott rendű egyenletnek géber föloldása módját: melyet ezennel, a következőkben a Tisztelt Közönségnek van (kimondhatatlan nagy) szerencsém és gyönyöröm közölni, vagy átadni ..." (1298/1).

Sajnos az írás következő része már nem ilyen összefüggő, világosan érthető szöveg. Az „átadásra" nyilvánvalóan nem kerülhetett sor.

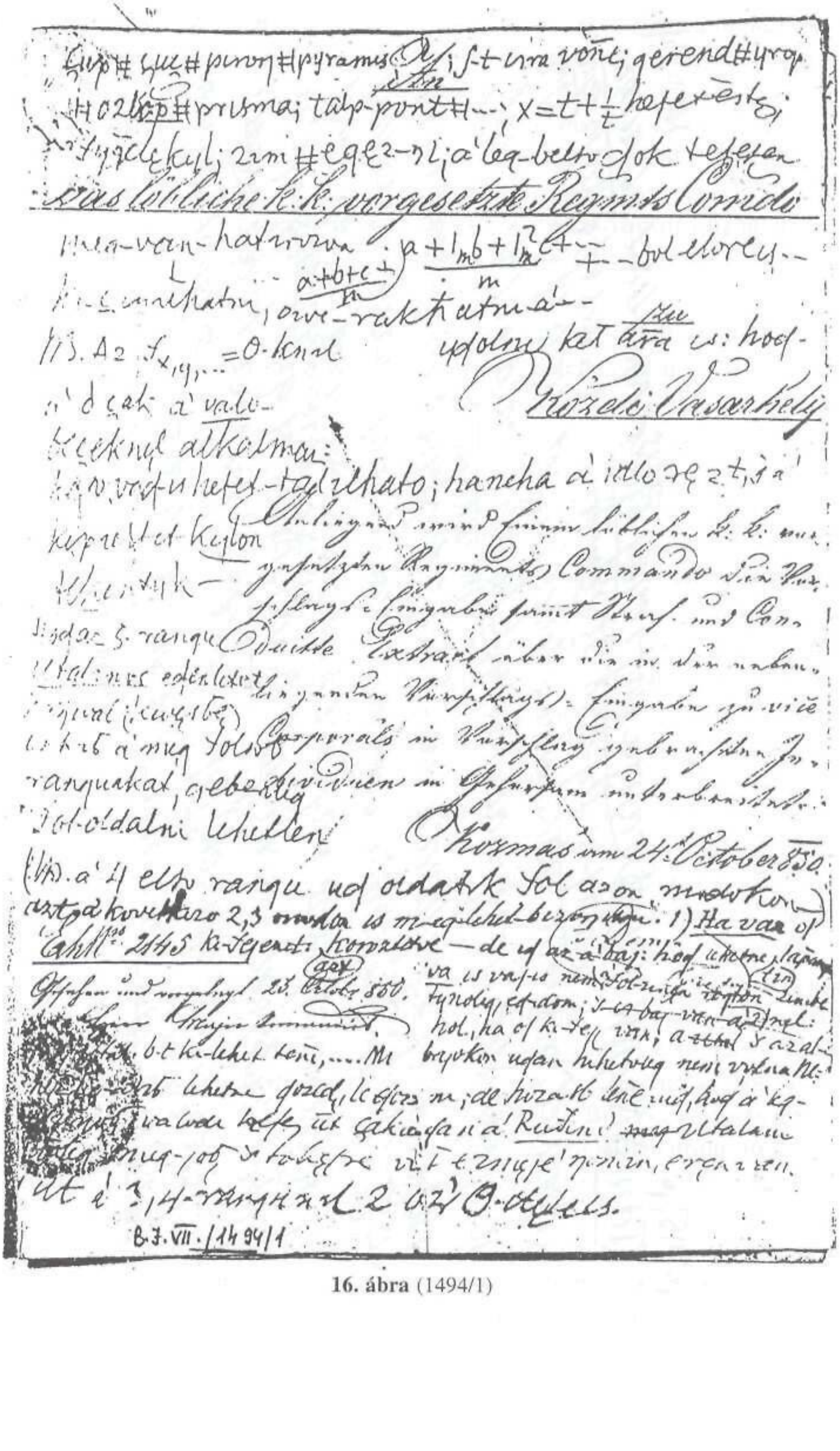
6.3. A Ruffini–Abel-tétel megfogalmazása

Elég hosszú ideig tartottak BOLYAI JÁNOSnak az algebrai egyenletek megoldására vonatkozó próbálkozásai. Egyik helyen, amint láttuk egy régi, s kétségtelenül hibás kísérletét akarja újból fölvázolni. Sokáig járt tehát bizonytalan úton. (Közben 1845-ben P. WANTZELnek is sikerül találnia egy bizonyítást a négynél magasabb fokú egyenletek megoldhatatlanságára, amely hasonlított RUFFINI munkájának egy részéhez.)

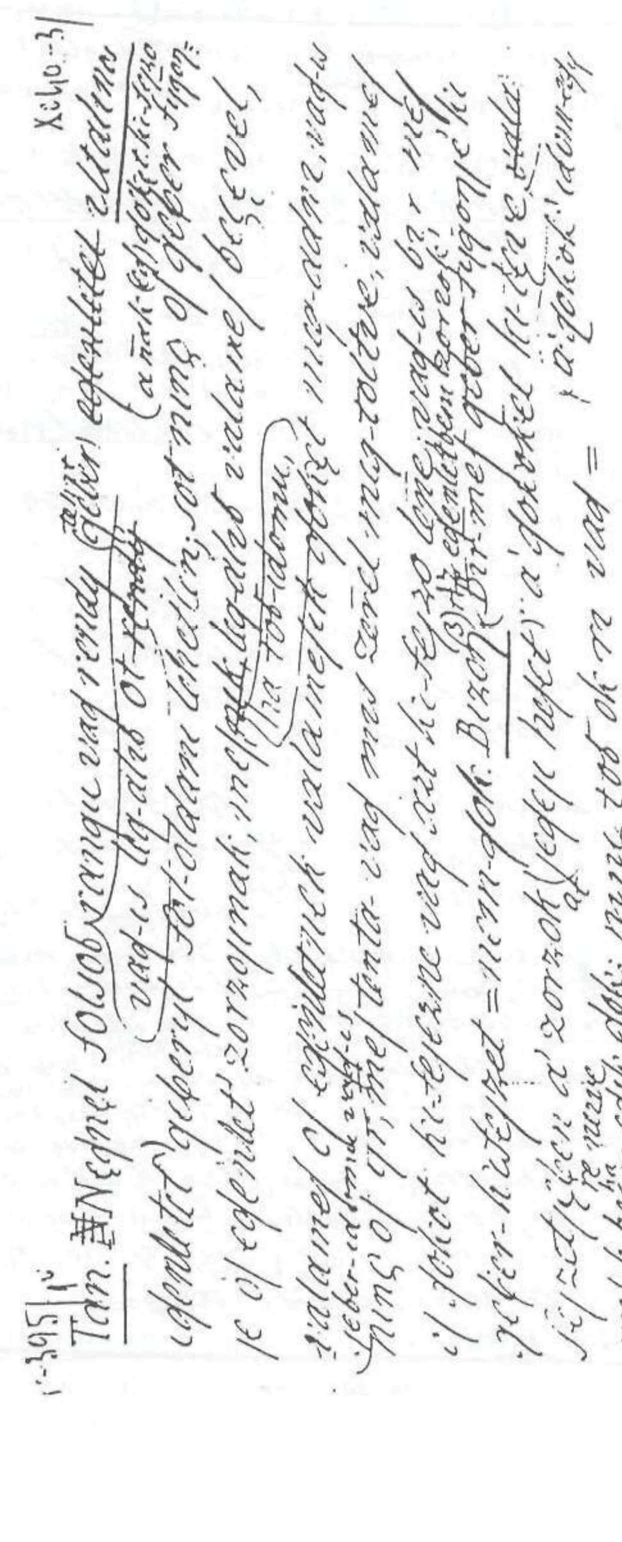
Egy idő után aztán BOLYAI ráébred kísérletei hiábavalóságára. A hátramaradt kéziratokban található nyilatkozatai tanúsítják, hogy sikerült kijavítania a Ruffini-tétel hibáit, és ezáltal meggyőződik arról, hogy a négynél magasabb fokú algebrai egyenletek algebrai úton általában nem oldhatók meg. Nem tudjuk, mikor történhetett a fordulat. De jó okunk van feltételezni, hogy erre csak az 1850-es évek elején került sor. Egy 1850. október 25-én kelt levélen maradt üres részekre írja ceruzával: *„Hogy az 5-rangú általános egyenlet s annyival inkább a még fölsőbb rangúakat geberül föloldani lehetlen ... a legegyszerübb valódi helyes út csakugyan a* RUFFINI *általam illőleg megjobbított és tökélyre vitt eszmélye nyomán lehet"* (1494/1) (**16. ábra**). Figyelemre méltó a hagyaték 395/1^{v} oldala. Sajnos ez is csak egyoldalnyi írás, amely keletkezésének időpontját nem sikerült megállapítani, de a Ruffini–Abel-tétel BOLYAI általi világos megfogalmazását tartalmazza: *„Tan. Négynél fölsőbb vagyis legalább öt-rangú (géber) általános egyenletet geberül föloldani lehetlen"*. A tétel kijelentését a bizonyítás követi, amelynek azonban csak első néhány szavát olvashatjuk le erről a lapról (**17. ábra**).

BOLYAI JÁNOS következő gondolatai is az 1850-es évekből valók. Ezek fia, BOLYAI DÉNES (1837–1913) írásgyakorlatára odavetett s elég nehezen kibetűzhető sorok (**3. ábra**). A megvonalkázott füzetlapon 1851 olvasható a 14 éves Dénes írásával. *„Véghatározat vagy ultimátum* – írja a lap alján maradt üres helyre BOLYAI JÁNOS – *Az 5'-s fölsőbb rangú egyenlet általános föloldása lehetlenségét két módon tudom megbizonyítani, úgy mint: a* RUFFINI *illőleg megjavított s tökélyre vitt szép, eredeti, elmés eszméje szerint; és hogy az* f_m $\{f_a = (abc \ldots kl)^m,\ f_b = (bcd \ldots la)^m$ (703/6^{v}) ugyanazt jelöli, mint fent az $u = (a + I_m b + I_m^2 c + \ldots + I_m^{m-2} k + I_m^{m-1} l)^m\}$ *számok 5-gyök-függvény csoportjait nem lehet 5-nél alsóbb (kisebb) rangú egyenlet által meghatározni, vinni. A legtöbb és szebb tehát, mit itt meg lehet tenni és kivánni, megkisérteni: hogy ily ..."* (1293/1^{v}). A folytatásra már nem maradt több hely az irkalapon.

Hasonló gondolatokat olvashatunk még az 1214/68 oldalon is: *„N.B. A 4-nél fölsőbb, vagyis már az 5-rangú, s tehát nem bajosan megmutathatólag annál*



16. ábra (1494/1)



17. ábra (395/1^{v})

inkább a még fölsőbb rangú általános geber egyenleteket, hogy általánosan geberül föloldani, azaz gyökjét a szorzókkal {együtthatókkal} *geberül üszonyozni (kitenni, kifejezni) nem lehet, azt a Ruffini módját, kisérletét is illőleg megigazítva, jobbítva, szigorítva, tökélyezve többképp megmutattam.*" Miután sikerült a tétel hibáit helyrehoznia, még dicsérő szavakat is talál az olasz matematikus munkájára: „RUFFINI *valóban éppen a legjobb helyt, az erénél, legegyszerűbben, könnyebben – és illőleg megjavítva, tökélyesítve okmutatványát* {bizonyítását} *– a dolog fenekére hatolva csipte meg a dolgot, jól vette föl, eszméje jó és – jól kivive – nagyon becses, szép, egyszerű ...*" (1094/27).

Az algebrai egyenletek kérdése BOLYAIt élete végéig foglalkoztatta. Ezt tanúsítja egy 1857. december 29-én keltezett sorsjegy, amelynek hátoldalán (337/1) a Cardano-képletet boncolgatja. Valamivel korábbi lehet Jánosnak az a rövid nyilatkozata, amelyet egy 1854. február 19-i kelettel ellátott s a „szegények megsegítésére" felszólító nyomtatvány hátulsó lapjára (1390/1) írt: „*4 rangon fölül semmire sem mehetni, semmit sem eszközölhetni ugyan elég a gyököket elég közelítőleg kifürkészve, puhatolva ...*" meghatározni.

Természetesnek érezzük, hogy BOLYAI JÁNOS írásainak számos helyén feltűnik az $x^m - 1 = 0$ binomegyenlet. Ő ezt az egyenletet „*tiszta egyenlet*"-nek (710/2) vagy „*legegyszerűbb egyenlet*"-nek nevezi (547/3). GAUSSnak a Disquisitiones arithmeticaeben bemutatott körosztásra vonatkozó tanulmányairól, más szóval a fenti egyenlet gyökeinek problémájáról a legnagyobb elismeréssel ír: „GAUSS *ki az $x^m - 1 = 0$ vagy tiszta egyenleteket is legelső oldotta geberül föl, azt alsóbb, ... egyszerűbb rendű tiszta egyenletekre vissza-vitel által, még pedig különös mélységgel, belátással és rendkivüli fényes elmének csaknem mindenütt gyönyörű nyomait hagyva ...*" (710/2^v). Hasonlóan meleg szavakat olvashatunk egy más alkalommal megfogalmazott nyilatkozatában is, noha ennek végén már felvillantja saját gondolatait is: „*A geber egyenletek terén a múlt és jelen évszázad óriásai sőt colossalis nyiászai – milyek egy* EULER, LAGRANGE, GAUSS *... – által tett számos szebbnél szebb ... találmányok között a* GAUSS *általi geber föloldása az $x^m - 1 = 0$ legegyszerűbb egyenletnek, vagy ha inkább tetszik az $x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$-nak ... kétségen kívül első rangú csillag gyanánt ragyog. Mi megfejtése is ... új nézetem szerént, különös utakon is rövidebben és egyszerűbben eszközölhető lesz*" (547/3, 3^v). BOLYAI véleményét nyomatékosabban hangsúlyozza az $x^m - 1 = 0$ egyenlettel kapcsolatosan följegyzett következő sorokban: „*...* GAUSS *elvei vagy nézetjei is mások vagy különböznek az enyiméktől; ezek sokkal egyszerűbb, rövidebb, ..., söbösebb úton vivén célhoz.*" (703/8). S végül: „*... $x^m - 1 = 0$ előleges föloldására már ugyan szükség van; de ezt is, nem csak ... új, egyszerű elv szerént a* GAUSS*énál rövidebb, könnyebb úton teljesítem: hanem egészen új útakon is ...*" (547/5).

Ezek az idézetek azt érzékeltetik, hogy BOLYAInak valóban sikerült leegyszerűsítenie GAUSS megoldását. Ugyanakkor alátámasztják Farkas 1831. június 20-án kelt levelének azt a részletét, amelyben tudatja GAUSS-szal János elhatározását a „polygon-teória" érthetőbb módon való ismertetésére (1.2.§). Az iratokban viszont nem sikerült rátalálni az érthetőbb változat részletes kidolgozására. Mivel János elég korán, még az 1820-as évek folyamán tanulmányozta GAUSS munkáját, így az akkoriban készített jegyzeteinek elkallódását megmagyarázhatjuk.

Még hosszan idézhetnénk az algebrai egyenletek megoldhatóságára vonatkozó jegyzetekből, de úgy gondoljuk, a bemutatott részek is jól mutatják, hogy a geométerként ismert BOLYAI JÁNOS is sokat töprengett e fontos problémán anélkül, hogy tudta volna, hogy azt előtte vagy vele egy időben már mások megoldották.

6.4. A klasszikus algebra alaptételének „tiszta" algebrai bizonyítása

A klasszikus algebra alaptétele így fogalmazható meg: Minden, legalább elsőfokú komplex együtthatós egyismeretlenes algebrai egyenletnek van megoldása (gyöke) a komplex számok testében. A tételt először A. GIRARD mondta ki (bizonyítás nélkül), majd D'ALEMBERT adott rá egy nem túl szabatos bizonyítást. A tételre az első szigorú bizonyítás GAUSStól származik, aki azt az 1799-es doktori disszertációjában közölte. GAUSSnak ez is kedvenc témája volt. Később még három bizonyítást is talált az algebra alaptételére 1815-ben, 1816-ban és 1849-ben.

Az elmúlt két évszázad folyamán GAUSS munkáin kívül még sok más szerző is bebizonyította ezt a tételt. Egyik nyilatkozata szerint maga BOLYAI JÁNOS is. „... *hogy a gyök léte* – írja 1844-ben – *mit* GAUSS *3-szor,* CAUCHY *egyszer, úgy tetszik* OHM *is, s én is tisztán finom úton régen megmutattam* ..." (445/3^v). Sajnos nem sikerült ennek a bizonyításnak nyomára akadni. Pedig léteznie kellett valahol. Különben nem írta volna BOLYAI egy másik helyen is, hogy: „... *eszközölvén egyszer-s-mind a gyökök léte bizonyítványját is, és nyervén erre nézve is egy új, még pedig kétségen kívül legtartalomdúsabb utat és módot*" (703/1^v).

Az alaptételt „tiszta" algebrai úton még nem sikerült bebizonyítani. GAUSSnak is az algebrai eszközök felhasználása mellett igénybe kellett vennie az analízis vagy a geometria módszereit is. Ez már BOLYAI FARKASnak is feltűnt, s bár a Tentamenben a legnagyobb dicséret hangján említi GAUSSnak az algebra alaptételét bizonyító híres értekezését, a Demonstratio nova-t, nem hagyja szó

nélkül, hogy itt a tisztán algebrai tétel bizonyításában geometriai megfontolások is szerepelnek [10, 1:461].

Amint már láttuk, BOLYAI JÁNOS jól ismerte a Demonstratio nova-t. Valószínűleg édesapjának a Tentamenben emelt kifogása sarkallta arra, hogy megkísérelje az algebra alaptételének tiszta algebrai bizonyítását. Szándékáról kézirataink két oldalán (885/1, 1^v) található német nyelvű jegyzete tanúskodik, amelynek címe: „*Egyszerű, tiszta algebrai bizonyítása a tételnek, hogy minden algebrai (rendezett egyenlet legalább etc.) sima racionális egész függvényt (kifejezés) elő lehet állítani egyszerű (vagy első fokú) tényezőkből.*"

A címet követő szöveg nem világos. BOLYAI itt is említi GAUSSt, aki először bizonyította a tételt, tud arról, hogy A. CAUCHY is adott rá egy bizonyítást, s hogy GAUSSnak létezik (akkor!) két további bizonyítása, de megjegyzi, hogy ő azokat nem ismeri.

BOLYAI JÁNOS följegyzéseit egy 1846. április 27-én keltezett katonai okmányra írta. Bizonyítását nem tudjuk követni ezen a lapon. Lehet, hogy a matematikatörténetben GAUSS után ő az első, aki kísérletet tett az algebra alaptételének tisztán algebrai eszközökkel való bebizonyítására. Nyilvánvalóan nem tudott arról, hogy erre GAUSS is törekedett.

Végül egy újabb helyreigazítással tartozunk. P. STÄCKEL megemlíti [106, 1:254], hogy János egy cédulán összeállította azokat a problémákat, melyekről úgy vélte, hogy meg tudja őket oldani. STÄCKEL állítását későbbi szerzők is fönntartják [32, 242 old.], [127, 126–127 old.]. Amint már szóvá tettük (2.5.§), ennek a kis írásnak a Marosvásárhelyen található iratok közötti felkutatása nem járt eredménnyel. STÄCKEL egy másik helyen [106, 1:277] azt írja anélkül, hogy állítását megindokolná, hogy ez a cédula 1855-ből való. BOLYAI JÁNOS eddig ismertetett kutatásainak számbavétele azt sugallja, hogy ez a vélemény kiigazításra szorul. Mi is van a cédulán? Csak két pontját emeljük ki:

1. Valamennyi egyenletnek algebrai úton való megoldása.

5. Valamennyi fajtájú törzsszám véges alakja.

E két feladat megoldását BOLYAI nem tűzhette ki magának 1855-ben. Az előző (6.3.§)-ban láttuk, hogy már az 1850-es évek elején tisztában volt a magasabb fokú algebrai egyenletek algebrai magoldhatatlanságával. Akkor 1855-ben az 1. feladatnak számára már nem lehetett értelme. A (4.3.§) és (4.7.§)-okban pedig megmutattuk, hogy BOLYAI JÁNOS már előbb meggyőződött arról, hogy sem a kis Fermat-tétel, sem a Wilson-tétel nem szolgál „*excelleng*" kritériumnak a prímekre vonatkozóan. (Igaz, hogy a Mersenne-féle számokkal még 1855-ben is kísérletezik (4.4.§).) Az (5.4.§)-ban pedig láthattuk, hogy a komplex prímek

leírása teljes mértékben sikerrel járt neki, vagyis ezeket már nem kellett kutatnia 1855-ben.

Következésképpen ez a cédula jóval korábban keletkezhetett, mint ahogy STÄCKELnél olvashatjuk.

7

A két Bolyai matematikai tartalmú leveleiből

7.1. Néhány mondat a levelekről

A két BOLYAI levelezésének tekintélyes része már közismert. Sok Bolyai-levél JAKÓ ZSIGMOND [17, 375–421 old.] és különösen BENKŐ SAMU [6, 11, 20] gondozásában jelent meg s az 1952-ben új lendülettel megindult Bolyai-kutatásban fontos szerephez jutott. Nélkülözhetetlen és hiteles forrásokká váltak a Bolyaiak élete és munkássága több, addig ismeretlen mozzanatának megvilágításában. A levelek közlésével BENKŐ és JAKÓ nagy szolgálatot tett azoknak, akik az utóbbi évtizedekben érdeklődéssel közeledtek a két BOLYAI felé. A kutatók számos tudományos munkában hivatkoznak ezekre a levelekre, mert segítségükkel jobban megérthetjük a két tudós-matematikus hétköznapjait, mindennapi gondjait s az őket foglalkoztató problémákat.

A napjainkig feltárt levelek csak elvétve tartalmaznak matematikai szövegrészeket. A közreadók nem lévén járatosak a matematikai ismeretekben és tartva a szaknyelv buktatóitól, érthető, hogy kerülték a matematikai természetű fejtegetéseket. Ha mégis vállalkoztak ilyen levelek közlésére, néha bántó elírások jelentek meg a közölt szövegek képleteiben [17, 413 old.], s ezáltal a szakma művelői részére azok használhatatlanok maradtak.

A kéziratos hagyaték újbóli áttanulmányozása során több olyan ismeretlen matematikai tárgyú levél is előkerült, amely nem keltette fel a kutatók figyelmét, vagy amelyeket egyszerűen mellőztek. Nem is csodálkozhatunk ezen, hiszen ebben az esetben a Bolyai-levelek kibetűzése alkalmával nemcsak az általa használt sajátos elnevezések és jelölések megfejtésével, de a szövegekben rejlő matematikai tartalom megértésével is meg kell birkóznunk. A BOLYAI JÁNOS által bevezetett olyan szavak mint *„okadat”*, *„mértárs”*, *„tevő-”* *„vevő-nyi”* először még a

szakember számára is különösnek tűnnek. Az ilyen fogalmak nem érthetőek meg a szövegekben rejlő belső összefüggések kihámozása nélkül.

Az itt következő tizennyolc levél közül négyet Farkas küldött Jánoshoz, a többit pedig János írta apjának. Ezek a levelek jórészt csupa tényközlő, száraz írások, némelyiket kisebb értekezésnek is tekinthetjük, de szinte mindegyik tartalmaz apró tanácsokat, néhány személyes vonatkozású közlést is. „*Szüvösön köszönöm a herpesre nézti tudakozódást*" – kezdi levelét BOLYAI JÁNOS s aztán néhány szó után nyomban rátér a tárgyra: „*Az pedig, hogy ha p prím, ...*" (746/1). Farkas pedig először azt közli fiával, hogy: „A templomban hosszú prédikatzió alatt hajdonfőn Grippet kaptam ..." s csak azután kérdez matematikát (1358/1). Azt is kiolvashatjuk a levelekből, hogy sokszor felkeresték egymást, tehát nem megalapozott az a vélemény, amely szerint miután ismét egy városban éltek, kerülték a találkozást s csak levélben érintkeztek [6, 94 old.]. A mindeddig ismeretlen levelekből éppen azt olvashatjuk ki, hogy gyakran felkeresték egymást. Idézzünk csak néhány mondatot ezekből: „... *holnap délután oda is ügyökszöm* ..." vagy „*Addig is míg magam oda mennék* ..." – írja János. Gyakrabban szerették volna egymást látni, de néha ez valamilyen akadályba ütközött. Milyen szépen menti ki magát János: „*Nagyon köszönöm a meglátogatni kívánást. De csak úgy, hogy legkisebb alkalmatlansággal se történjék, kivált ezen mostoha, vad, zordon, savanyú, kellemetlen s egészségtelen időben, bármint kívánnám is különbön találkozni* ...". „Meglátogatnálak, de nem merek akkora úthoz fogni" – panaszkodik az idős Farkas. Írásaik elárulják, hogy számos matematikai témáról beszélgettek, amelyeket aztán levél formájában is rögzítettek. Megtörtént, hogy az újbóli találkozástól csupán egy nap választotta el őket, gondolataikat mégis megírják egymásnak.

A Bolyaiak életrajzírói számtalanszor felrótták, hogy leveleikről hiányzik a megszólítás és végükről az üdvözlet meg az aláírás. Lehet, hogy ez az eljárás szokatlan az olvasónak, de nem feltétlenül a levélírók közötti barátságtalan viszony tükrözője. Olvassuk csak a leveleket!! Hangvételük szépséget, egymás iránti ragaszkodást, féltést, tiszteletet sugall. Egy matematikai dolgozat nem kezdődik feltétlenül a megszólítással és nem végződik búcsúzkodással. Különben is írásaikat rendszerint visszakérték egymástól, így ezeket nem annyira leveleknek, mint inkább saját maguknak készített jegyzeteknek tekinthették. A megszólítás akkor pedig fölösleges.

Feltűnő, hogy János az apjának küldött levelekben nem a más kéziratlapokon előszeretettel alkalmazott, maga által alkotott betűket használja. Úgy látszik, nem akarta terhelni apját, ezért leveleinek fogalmazásakor megelégszik az ábécé szokásos betűivel. Leveleinek nagy része gondosan elkészített, szépen lemásolt szöveg. Azért előfordult néha, hogy „*nyakra-főre sietve*" csúnyán ír apjának. „*A küldött demonstrációm bár is rútúl írva*" – ismeri be egyik alkalommal (1014/1). Máskor, ha túl sok a tennivalója, nem ér rá rendbeszedni gondolatait. „*Ez egész*

demonstrációkat – írja – *lehet s kell szép logikai renddel különböző osztály s alosztályokkal előadni: mire most nem érkezem*" (495/2).

A közlendő levelek közül az elsőt 1844-ben Domáldon írta BOLYAI JÁNOS, az utolsók Marosvásárhelyen keletkeztek 1855-ben. Elég sok gondot okozott több levél keltezésének a megállapítása. BOLYAI FARKAS gyakrabban írt időpontot a leveleire, de néha ő is elmulasztotta ezt. Bizonyos esetekben a levelek tartalma vagy valamilyen eseményre való utalás a levélben elég jól eligazít, megtörtént azonban az is, hogy a dátum megállapítására vonatkozó kísérletünk nem járt sikerrel. Egy időrendi sorrendet mégis feltételeztünk s ennek alapján helyeztük a leveleket egymás után.

Apa és fia egymásnak írt, most napvilágot látó levelei – három egyes részleteinek kivételével – eddigelé kiadatlanok. Közülük többől idéztünk kisebb-nagyobb részleteket a közelmúltban megjelent vagy sajtó alatt lévő tanulmányainkban [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76] s természetesen könyvünk előző fejezeteiben is. A leveleket most a hagyatékban megtalált formában – egy kivételével – teljes terjedelmükben adjuk közre. Az írások a két Bolyai számos gondolatát megőrizték számunkra. Ha János nem levélben válaszol apja kérdéseire, akkor ma igencsak szegényebbek volnánk az őket foglalkoztató matematikai problémák ismeretében.

A levelek nem egyformán értékesek. Van köztük olyan, amelyet könnyű olvasni, s egyben sok felvilágosítással szolgál, de akad olyan is, amelynek fogalmazása nekézkes, körülményes és nem sok adatot tartalmaz. A már az előzőekben feldolgozott, értelmezett levelek mellett néhányat most minden különösebb magyarázat nélkül közlünk, remélve, hogy tanulmányozásuk így is hasznos lesz az olvasónak és a későbbi idők kutatóinak.

A legtöbb levélben számelméleti kérdésekkel találkozunk, de a matematika más ágaihoz tartozóak is előfordulnak közöttük. BOLYAI JÁNOS sokoldalúságát bizonyítják az algebra, a geometria és az analízis kérdéseit boncolgató levelei. Számos levél elolvasásakor sajnáljuk, hogy hiányzik a befejezése. Egy gondolat hirtelen megszakad, s nem tudhatjuk meg a folytatást. Ez a más kéziratlapokkal is elég gyakran előforduló jelenség mindig nehezen elviselhető a kutatónak s nyilvánvalóan az olvasónak is. Még fájdalmasabban érint BOLYAI GERGELY 1884-ből való írása, amelyben megvallja, hogy János és Farkas sok matematikai tartalmú levelét megsemmisítette, mert nem ítélte méltónak az utókor pillantására.

Ugyancsak pótolhatatlan űrt jelent a Bolyai-kutatás számára azoknak a leveleknek a hiánya, amelyeket János Bécsből és fiatal tiszt korából intézett apjához. Ezekben feltehetően részletesen beszámolt geometriai rendszerének megalkotásáról. Sajnos éppen ezek a tudománytörténeti szempontból legfontosabbak tűntek el nyomtalanul. A levelekről csak annyit tudunk, hogy léteztek (hisz, amint János a nevezetes temesvári levelében ($1565/1^v$) apjának megírta: „*mindaz, valamit eddig küldöttem, tsak kártyaház a toronyhoz képest*", arra enged következtetni,

hogy valóban voltak még olyan levelek, amelyeket még nem ismerünk), de amikor a tudományos kutatás figyelme ráterelődött a Bolyaiak kéziratos hagyatékára, már csak a temesvárit sikerült meglelni [20, 24–25 old.].

Nemcsak János ifjúkori levelei tűntek el végleg, de több időskorából származó levelet sem találunk. Éppen az általunk bemutatott leveleket olvasva támad sokszor hiányérzetünk, mert bennük mindegyre olyan, más levelekre való hivatkozásokba ütközünk, amelyeket hiába keresünk.

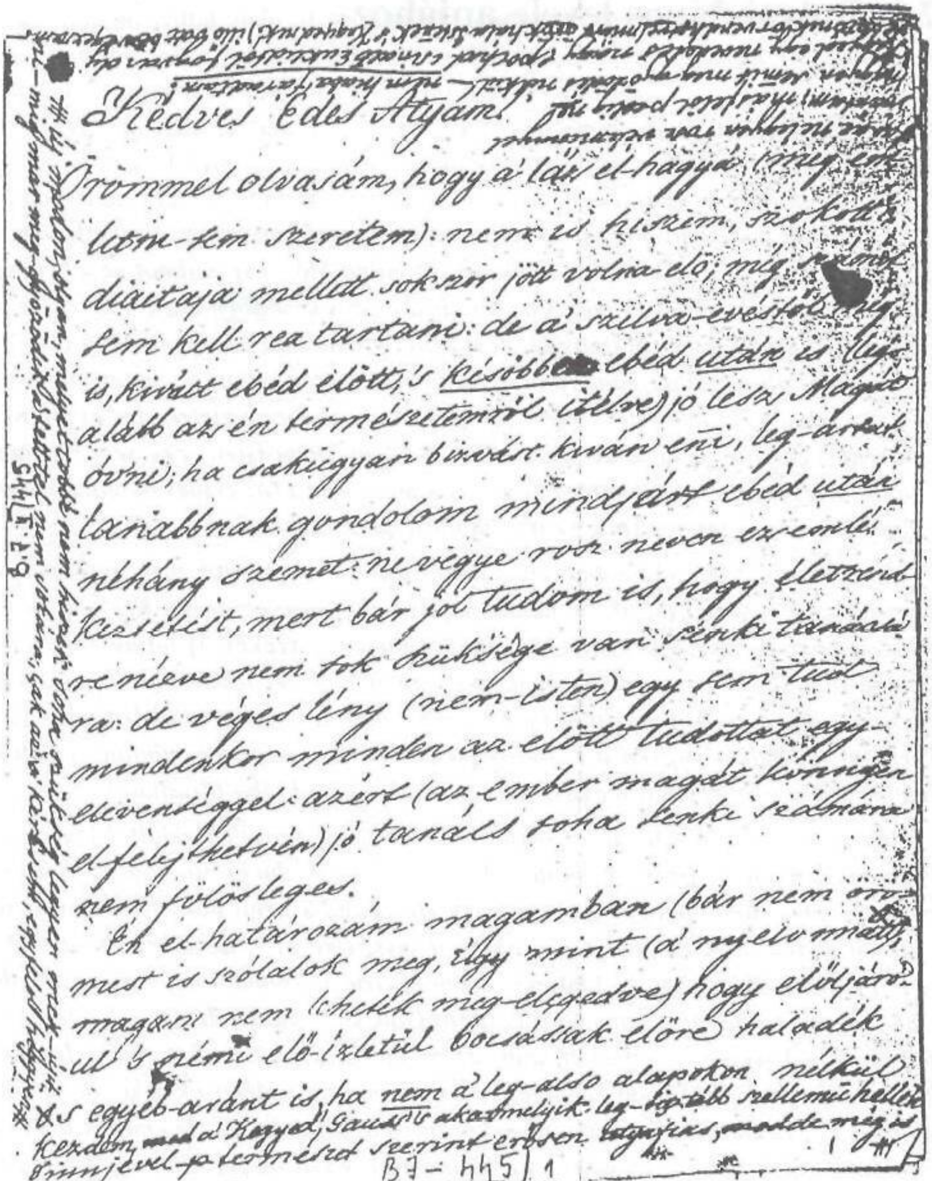
7.2. Bolyai János levele apjához

Kedves Édes Atyám!

Örömmel olvasám, hogy a láz elhagyá (még említeni sem szeretem): nem is hiszem, szokott diaetája mellett sokszor jött volna elő; még számot sem kell rea tartani: de a szilva evéstől mégis kivált ebéd előtt s későbben ebéd után is (legalább az én természetemről itélve) jó lesz Magát óvni, ha csakugyan bízvást kéván enni, legártatlanabbnak gondolom mindjárt ebéd után néhány szemet: ne vegye rossz néven ez emlékeztetést, mert bár jól tudom is, hogy életrendre nézve nem sok szüksége van senki tanácsára; de véges lény (nem-isten) egy sem tud mindenkor minden az előtt tudottat egy elevenséggel: azért (az ember magát könnyen elfelejthetvén) jó tanács soha senki számára nem fölösleges.

Én elhatározám magamban (bár nem örömest is szólalok meg, úgy mint (a nyelv miatt s egyéb-aránt is, ha nem a legalsó alapokon kezdem a Kegyed, Gauss s akármelyik legtisztább szellemű hellén Sinnjével {érzékével} *természet szerint erősen atyafias mód de mégis új módon, olyan, melyet többé nem hiszek soha szükség legyen megújítni – míg már meggyőződik a tettel nemsokára, csak az a kérésem, egyfelől higgyen azaz ne legyen rossz véleménnyel irántam, másfelől pedig ne higgyen semmit meggyőződés nélkül – nem hiába fáradtam!*

Kegyed egy nevezetes nagy epochát {korszakot} *csinált Euklidtől fogva: oly vezetőnek örvendve (miért örök hála Istennek s Kegyednek) illő volt bevégeznem magam nem lehetek megelégedve), hogy előljáróul s némi elő-izletűl bocsássak előre haladék nélkül mihelyt Kolosvárról vissza kerülök hová már több okból nem meheték el* {utólagos oldaljegyzet} *magyarul is (gondolom a magyar tudós társasághoz küldendőül), németül is (mint Gaussnak küldendőt) egy kis terjedelmű munkát következő cím alatt, mint az* ∞ *kicsi, Leibnitzisták rossz stylusukkal szólva differenciálját azon rengetegnek, mely már szándékozok a köz-jóra világ elébe adni, némi jeléül annak, hogy koránt sem aludtam el életemet, s nem vagyok azon meg-vettetésre méltó, millyel némelyek hát megett illetnek. Csak az a fatalis körülmény szúr, fúr most is, mi tanim kiadásától eddig is mind el-tartott, hogy a tan még TÖKÉLYES rendben, idomban nincs, vagyis míg kijelelése is nem tökélyes. Bármily tökélyesen tudja is az ember maga mind értésre, mind kijelelésre nézve, de ha az olvasót is meg nem barátkoztatta még a helyes nyelvvel, oly mint mikor egy darázsfészekbe nyul az ember. Hagyva most a nyelvet mellyel is azonban, melyet így neki tartok a leg>szerű és közjáró hatósabb szernek s találmányim közül a megirandó (erősen tágas) korlátok között, mint minden*



Kedves Édes Atyám!

Örömmel olvasám, hogy a' láz el-hagyá (még em-
líteni sem szeretem): nem is hiszem, szokott
diaitája mellett sok szor jött volna elő; még
sem kell rea tartani: de a' szilva-evéstől még
is, kivált ebéd előtt, 's későbben ebéd után is
alább az én természetemről ítélve) jó lesz Magát
óvni; ha csakugyan birvást kíván enni, leg-ártat-
lanabbnak gondolom mindjárt ebéd után
néhány szemet: ne vegye rossz néven ez emlé-
keztetést, mert bár jól tudom is, hogy életrend-
re nézve nem sok szüksége van senki tanácsá-
ra: de véges lény (nem-isten) egy sem tud
mindenkor minden az előtt tudottat egy
elevenséggel: azért (az ember magát könnyen
el-felejthetvén) jó tanács soha senki számára
nem fölösleges.
Én el-határozám magamban (bár nem örö-
mest is szólalok meg, így mint (a' nyelvomat
magam nem lehetek meg elégedve) hogy előljáró-
ul 's némi elő-ízletül bocsássak előre haladék
's egyéb-aránt is, ha nem a' leg-alsó alapokon nélkül
kezdem szerint erősen

B7-445/1

18. ábra (445/1)

tannal is – tökélyessel bírok csak isten jó akaratja szerint per se érdem benne úgy nincs, mint 3 véka búzának, hogy több két vékánál. Kolosvárra is megírám, hogy buzgón igyekszem, némi figyelmet (azaz hirt nevet) nyerni, hanem figyelmet érdemlő dolgokat tenni, ezt pedig csupán a közművelődés jó terjesztésére, emelé-

sére (tehetség szerint) s azáltal a közszeretet lehető megnyerésére de (vissza térve levelem fonalára) hagyva most a nyelvet, a dologban magában is alig tudok megszólalni, hogy egy egész nagy sereg odatartozó ne tolja magát elő, mit kihagynom is bajos. Szinte másodpercenként omlik a mind újabb mélyebb belátás s az elme hova tovább a gyakorlással erősülve könnyül és a mit régen magam sem hittem (∞-nek tartván az üdő-tan mezejét) már ott állok, hogy reménylem, hogy nem sokára (jeleni célomhoz képest csaknem kifogom meritni bizonyos kijelelendő tágas korlátokon belől az időtant is. Az integrálistanban is tömérdek új, könnyű, tiszta tanom van: de (min is csodálkozni fog) a variációtant, több más utakon kívül, elég furcsán egyszerűen, könnyen, kőzönien {általánosan} *semel pro semper* {egyszer s mindenkorra} *úgy oldottam föl, hogy csak gyermek-játék, de most ezeket is hagyva Kegyednek, mint a dicső URANIA hív cliensének* {ügyfelének} *egy kis örömöt szerezni kívánó balzsamul egy néhány föladat megfejtését írom meg ide röviden, mely ugyan (mint Kegyed is jól tudja) egy a leg>bogok közül s melyről egy EULER, LAGRANGE után még egy GAUSS is (a földgömbnek tanászainak s az évezredeknek egy oly kolossza, herkulese) így ír a Dem. novában: „... post tot tantorum geometrarum labores perexiguam spem superesse ad resolutionem generalem aequationum algebraicarum uniquam perveniendi ita ut magis magisque veri simile fiat, talem resolutionem omnino esse impossibilem et contradictoriam hoc eo minus paradoxum videri debet ... Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem jam pro quinto gradu omni rigore demonstrare ..." A Disq. Ar. ban ismételve 645. lapon: „Constat omnes summorum geometrarum labores, aequationum ordinem quartum superantium resolutionem generalem inveniendo semper hactenus irritos fuisse et vix dubium manet quin hocce problema nostram analyseas hodiernae vires superet, quam potius aliquid impossibile proponat", s midőn ő Maga méltán oly nagy becset tulajdonít már az* $x^m - 1 = 0$ *resolutiojának (mi is nem csak az én gralis módomon megesik, hanem külön úton is erősen könnyen röviden) s mindenként minden csak valamennyire jártas mathematikus előtt elég evidens, mily rengeteg becse van a következő tannak, mi által (mint egy befejező tannal némely egyebek mellett az egész algebra kíván teljesen merítve – mit szándékom is tenni – minden egyéb tanom jeleninek erősen hív testvére lévén, s vele mind egy szellemű lévén, egy húron pendülvén) sok egyebet is létesítettem, mit Gauss lehetlennek declarált. Már a dologra („ne vero hoc inepte"* {hogy ne tegyem ezt ostobán} *). Hogy bár bemenni szándékozván is Vásárhelyre, most írok, oka az, hogy (megvallva) már szégyenlem többször tanálkozni Kegyeddel magamnak tévén szemrehányást míg valamit nem mutatok. Jeleni tan elgondolása pedig nem volt több néhány másodpercnél, miután más csakugyan természetes bajok, de nehéz, méjj és nem egészen áthatott útakon sok élességgel és elme-feszítéssel próbálta, (mint tették kétségen kívül a tisztelt*

említettek is, noha ott nem hiszem jártak volna), mihelyt e gondolat elmémbe ötlött: azonnal néhány másodperc alatt (mint írám) azt is láttam, hogy meg van. Legyen tehát ez, mint a nap följöttének a hajnal tüzes pírja előjele annak mik, ha isten továbbra is kedvez jeleni működésemnek, nemsokára következnek. Már megdicsekvém íme itt van.

MINDEN (RENDŰ) ALGEBRAI EGYENLETEK (KÖZÖNI) ALGEBRAI FÖL-OLDÁSA MODORJA (ÚTJA) (a 0-rendűt kivéve).

Megcáfolásával egy (RUFFINI által) az ilyettevés lehetlensége mutatásának (hogy a gyök léte (mit G. {Gauss} *3-szor, Cauchy egyszer, úgy tetszik Ohm is, s én is tisztán finom úton régen megmutattam), ez által önkényt egy új úton eo ipso* {magától értetődően} *megmutattik: meg-látszand. Egyébaránt e demonstráció erősen egyszerű, rövid, könnyű, gyönyörű (mit hiszem, hogy sem Kegyed, sem G. csak szóra nem hiszem, vagy azt mondaná akármelyik ily igéretre tréfásúl szólva), hogy ha azt megteszem: varázsolni tudok.*

Már a dologra!

Legyen m akármely tevő-szám (tettleges szám, latinul numerus positivus) 1-et föül haladó és legyen a, b, c, ... közül mindenik, vagy akármi véges nyi {mennyiség} *vagy 0, s ezeknek hánya = m; továbbá legyenek*

$$-a-b-c-\ldots=A$$

$$ab+ac+bc+\ldots=B$$

$$-abc-\ldots=C$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

ismeretesül lesz, akármennyi legyen x (itt mind véges nyit értve),

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots=x^m+A\,x^{m-1}+B\,x^{m-2}+C\,x^{m-3}+\ldots$$

ezen fü x-től függő (latinul functius ipsus x) $=0$, *mihelyt x = az a, b, c, ... akármelyikéhez, vagy is a, b, c, ... nek mindegyike azon függőt, mely legyen rövidségért* $=X$, *0-vá teszi (ezen egyenletet* $X=0$ *kielégíti, vagyis az illetlen latin név hív fordításával, gyök(er)e ezen egyenletnek).*

Legyen rövidségért, egyszerűségért egy idomúságért jobb izléssel s minden tekintetbeni jegyi tökélyesítésért $+\!\!\!\cdot\, 1$, *s* $-\!\!\!\cdot\, 1$ *a* $\sqrt{-1}$ *becseinek (melyeknek éppen úgy lényt lehet és kell megfeleltetni, mint a tevő s vevő nyiknek* {pozitiv s negatív mennyiség} *(az utóbbi latinul quantitatis negativa) jegyei, s neveztessenek itt mind a + mind a – nyik sima vagy egyenes, mind a* $+\!\!\!\cdot$ *mind a* $-\!\!\!\cdot$ *nyik pedig pontos – vagy mellék – vagy oldalas – nyiknek (melyekrőli tökélyes és teljes tanomat is nemsokára szándékozom közre-bocsátani).*

Ezen magyarázatok után azt állítom, hogy ha egy szorzat $=0$, *akkor is, mikor a szorzat „*$p \dotplus q$*"* $\{p+iq\}$ *idomúak, vagy elegyek is lehetnek (*$\underline{p}$ *is* $\underline{q}$ *is sima-nyit jelentvén): valamelyik szorzó* $=0$. *Mert ha* $(p \dotplus q)(r \dotplus s)=0$ *(*$\underline{r}$ *is* $\underline{s}$ *is sima nyit tévén): úgy ismeretesül* $(pr-qs) \dotplus (qr+ps)=0$ *tehát* $pr-qs=0$, $qr+ps=0$, *s az utolsó egyenlet r-rel, az előtte valót s-sel szorozva, s az utóbb származott egyenletet az előbb származottból elvonva, ered* $(r^2+s^2)q=0$ *és így vagy* r^2+ $+s^2$, *tehát r is, s is s végre* $r \dotplus s$ *is (mely az egyik szorzó), vagy* $q=0$, *mi utóbbi esetben az előbbi* $pr-qs=0$*-t, r-rel, a* $qr+ps=0$*-t s-sel szorozva, s a két új egyenletet summázva lessz*

A levél (445/1, 1^v, 2, 2^v, 3, 3^v, 4, 4^v) Domáldon 1844. szeptember 2-a után íródott. Erre a kolozsvári és vásárhelyi utazásokkal kapcsolatos utalások alapján következtethetünk. Amint ismeretes [6, 17 old.] BOLYAI JÁNOS meghívást kapott a magyar orvosok és természetvizsgálók 1844. szeptember 2-án ($421/1^v$) kezdődő kolozsvári nagygyűlésére. Előadásra kérték fel, s ő „*buzgón*" igyekezett „*némi figyelmet nyerni*". Sajnos a nagygyűlés végül az ő részvétele nélkül zajlott le. Erről tanúskodik oldaljegyzete a $445/1^v$ lap szélén: „*hová már több okból nem meheték el*", amellyel levelét kiegészítette még mielőtt postázta volna. Milyen nagyszerű alkalom lehetett volna számára, ha a domáldi magányból „*a közszeretet lehető megnyerésére*" legalább egy kísérletet tehetett volna.

BOLYAI szinte minden írását számos betoldással tarkította. Levelének első oldala (amelyet fakszimilén is bemutatunk) jó példa erre. Az eredeti levél második bekezdésének 2. sorában található jel azt mutatja, hogy a gondolat a lap alján folytatódik. Ennek második sora végén egy újabb Bolyai-jel arra utal, hogy az oldaljegyzet következik, aminek végén is van, most már egy harmadik „jegy", amelynek alapján a befejező részt akkor olvashatjuk el, ha a levelet 180°-kal elfordítjuk.

Az ilyen betoldások néha körülményessé teszik az írás folyamatos olvasását. Átírásunkban például a második bekezdés első három szavával kezdődő mondat folytatása kilenc sorral lejjebb található, vagyis így hangzik: „*Én elhatározám magamban, hogy előljáróul s némi ...*".

GAUSS Demonstratio nova és a Disquisitiones arithmeticae-ből idézett hosszú latin szövegek BOLYAI által készített magyar nyelvű fordításaival vagy „*áttevései*"-vel a (6.2.§)-ban találkoztunk.

A levélből több helyen – (1.2.§), (2.3.§), (5.4.§), (6.2.§), (6.4.§) – idéztünk.

Végén csonka, nincs befejezve.

7.3. Bolyai János levele apjához

Újabbi levél-küldésem, se levelem hosszúságán ne botránkozzék meg: olvassa végig csendesen s figyelemmel (nekem is meg-lévén magam sérelmei) a körülmények által magát történetesen előadott mathesisi részt is különösön; midőn az (mennyiben hirtelenséggel rövidre lehetett) nem csak egy felől azon kívánsága szerinti, hogy látná valami jelét, hogy élek még: hanem azon másik kívánságának is eleget teszen, miszerint az imagináriumokróli tanjának (theoria) alapos és körülményes (en detail) megcáfolását kívánta több ízben. Ebből most erős reményem szerint (2·2=4 módra) mulhatlanul meg fog teljesen győződni, hogy (bár is az eddigi módja, egy első útnak, próbának kitűnő szép elmére mutatott) az imagináriumokroli tanja ingó gyenge alapra s nem elég körültekintéssel (circums) sectio {beosztás}, *circumspicientia* {vizsgálat}*) megfontolással s a dolog erébei belátással, hatással van építve s teljességgel meg nem állhat: a dolog lényege kissé méjjebben van (bár is nem erősen méjjen), és egyebütt; én ott maga helyén kerestem, és meg is kaptam szerencsésen még 831-ben.*

Botlani (mint a legügyesebb dexterusb {jobb}, *habilisebb calculistának* {ügyesebb számítónak} *is) emberi dolog; a hibát meglátni észre venni ügyes emberé; megismerni becsületes szerény és nemes jószándékú emberé; s nem hogy szégyen volna: hanem dicsős(ség); s épen meg-nem-látni tudni vagy akarni lenne (egyébaránti elme mellett) szégyen s <-ség.*

Jeleni tárgy is, bármi rövid is, mint per se (a G. {Gauss} *nyilatkozata, elismerése, itélete szerint is, s minden derék mathematicusé szerint) egyik legfontosabb, sarkalatosb dologra nézve az egész tanban, Kegyednek oly rég óta és oly vakmerően (az enyimnek, elméni (úgy) hitt s ráfogott, vagy képzelt gyengülése állításával, megvetése, legyalázása, mocskolása mellett, noha a végin csak annak kell örökre meg- és fön-állni mint Kegyed is rá-fog-térni-) erősített tanját egyszerre végképpen le-ontó, nem keveset ér, s reményben Kegyed is már most íly apróra ki-fejtve, meg-becsüli.*

Egyébaránt mind ennek a veleje már a Dissertatiomban {célzás a Responsiora} *is meg volt, mennyi tudniilik elég a Kegyed módjával ismeretes és figyelemmel s jó combinatioval s alkalmazással bíró olvasónak. De sok szerencsétlenségre váltt már az, s eredett abból (mind tanilag, mind egész lelkületet véve), hogy Kegyed elejétől fogva nem nézte jól meg a levelemet, s alig átfutva, félre vetette, s annál fogva sok legfontosb s derekasb tanimat is egészen félre s nem értette, s megvetette miből azután sok erősen kedvetlen penna- s szóharcok (logomáchia)* {kóros bőbeszédűség} *kerekedtek.*

Jeleni példából is győződjék meg kegyed, hogy nálam (oly régóta állhatatoson, lelkiismeretesen, auf Tod und Leben {Életre-halálra} *neki feküdvén) meg is van rágva s emésztve holmi tökélyesen ki-téve azt, miről magam ki-jelelem, mi hiányzik, s az koránt sem emberi erőt fölül-haladó dolog, ezt állítni absurdum, mert*

én soha <u>olyan</u> transscendentaleval nem bajlódom, minek ne lehessen ember embere s más józan termett ember is éppen úgy képes jól látni s olvasni a természet (nagy könyvében) -ben mint én, ha elfogulatlanul nyitja ki a szemét, s húzamosan ráfüggeszti. Minden isten akaratja szerint van, s nincs egyéb dics, érdem, mint az ön-érzet, s a mások művelődése s boldogsága előmozdítása s emelése tudásából eredő bel-jutalom (mint millió másának nincs semmi érdemes dicse, hogy >1 *másánál); az pedig tiszta, ártatlan gyönyör.*

Egyébaránt jeleni levélben még (fájdalom!) kellett lenni a jó mellett kedvetlennek is, hogy még egyszer akaratom szerint utoljára, vagyis befejezőleg) keserüségemet és ebbéli tudatomat őszinte kijelentve, könnyebüljek s csendesedjem. Nincs mód, hogy jeleni levelembeni fölvilágosítások s kifejtések után (mind az engem mikor nem is gondoltam volna, oly méltatlanul sértő s <bitni kívánó, Antalnak irott, de mellékelt levele iránt, a többi melyek mind ∞ *tónusúak s az én Antal előtti becsületem, tekintetem s nyertt jóindulatom lerontására s engem kirekesztésre célzók voltak, nem is említve mind pedig egyebekre nézve) nincs mód mondom, hogy át-nelássa s meg ne ismerje, hogy bizony én is sok méltatlanságot szenvedtem Kegyedtől minek egy jó nagy része (többként) most az Antal halála után jöve (hihetőleg nem várt képpen) világosságra: de el-töltek s legyenek elfeledve! töltsük kedvesebb foglalatossággal a becses időt s ne rontsuk magunkat is egymást rontani akarva.*

Egyébaránt, az (Kegyed által célba vett) osztály bevégzéséig (végrehajtásáig) is legegyszerübb, tisztább, egyenesb, illőbb, igazságosb s természetesbnek tanálom engem minden (pénz- s naturale, ha ez nem tétettnék pénzzé) jövedelemből, mint harmadost, részeltettni de én nem törvénykezem s ízetlenkedem, ha lehet, kivált az apámmal. Kegyed lelkiismeretére bízom.

Gergelyt pedig nincs mért illő gondoskodásom föül félteni, hogy meg nem él, mert ő ügyes ember s életre való jó gazdának indult (éppen mivel nem öli magát a . . . {itt megszakad}.

Három apró zöld színű lapocska mindkét oldalára (740/1, 1^v, 2, 2^v, 3, 3^v) írt levél (vagy fogalmazvány). Azért iktattuk a matematikai tárgyú levelek közé, mert az imaginárius számokkal kapcsolatos.

Keltezés nincs rajta, de abból, hogy az Antalnak írott levelet emlegeti, következtethetünk arra, hogy azt nagybátyja, BOLYAI ANTAL 1845-ben bekövetkezett halála után írta. Ui. ekkor kerül János kezébe Farkasnak az a levele, amelyet öccséhez, Antalhoz 1838. március 19-én írt.

E levélből hosszan idéz BENKŐ SAMU is [6, 86–90 old.]. Egy lényegtelen elírást kell csupán kijavítanunk. Az idézet első része [6, 88 old.] nem az 1124 jelzetű kéziraton, hanem a $740/1^v$ jelzetű oldalon található.

Ez az írás enyhébb szövegezésű, mint a JAKÓ [17, 389–390 old.] és STÄCKEL [106, 124–125 old.] által közölt fogalmazványtöredékek (739/1).

7.4. Bolyai János levele apjához

gyönyörübb, dús aratással például (mi megint föl-ér magával a ○□ val {kör négyszögesítéssel}*) a MONTUCLA által méltán dicsért MASCHERONI a geometria constructiokat* {geometriai szerkesztéseket} *csupa kör-irással it és nagyon szépen, elmésen viszi ugyan véghez: de egyfelől fölteszi a 11-dik elvét, másfelől a lapit melyen működik, s még egy 3-dik s 4-dik hiány is van. Nekem pedig a Világon semmi sem kell (!!!) és így, például föltéve a ○□ hatását a ○ azon gyönyörű tulajdonnal bír, saját magához = □et csinálni tudni. Recte!* {Igen! Helyes!}, *hogy ○ végesen ≠□ nem lehet, s több afféle, rég megbizonyítottam. Amit pedig a log nat functió tárgyról mondottam, oly bizonyos, mint* $2\cdot 2=4$; {néhány szó hiányzik a lapról} *s fölér némileg megannyi ○□-vel. a* π*-t magát még, írott akadályom miatt nem igazíthattam el; de csalni nem igen szokott tapintatom avval bíztat, hogy az is ki-jő; sőt még* ∞ *sok egyéb afféle. Mostanság csaknem az egész mathésis minden régiót el-* {hiányzik a levél egy részlete} *több egyéb lényeges új* {néhány szó hiányzik} *némi ezt illetőt láthat. Nagy tanúság volt a Newton* {olvashatatlan}. *Ezt anticipálva, nyakra-főre írám, tartva tőle, hogy különbön igen hátra halasztom: már válaszlok a küldöttök rendje szerint pontonként. De még egyet: rögtön válaszoltam volna, ha beteg ne legyek: de már néhány hét óta bajlódom, vagy kétszer éppen veszélyesen is lévén, de a hatalmas Priesznitz módján (örök hála a testi egészség ezen nagyszerű nömös hőse és X tussának!) befogva mind a hatot. Isten után némileg jobbacskán lettem, s reménylem már nem sokára helyre állok: minek írásával nem is alkalmatlankodnám, ha nem érezném kötelesnek magamat megmenteni hosszas hallgatásomért és ut incassum aut perperam me jactavisse, mihi quidquam arrogavisse, vanas exercuisse minas, gemitusque immanes ciendo murem ridiculus peperisse ne videar* {ne tűnjek úgy, hogy hasztalan és hamisan büszkélkedtem, magamnak olyan érdemeket tulajdonítottam s megalapozatlanúl fenyegettem és óriásokat nyögve egy nevetséges egeret szültem}*; s más*

Levéltöredék egy kis cédula két oldalán. Elején és végén csonka. A kézirat (741/1, 1^v) felső része hiányzik, azért nem olvasható az oldaljegyzet egy része sem.

Keltezését nem sikerült megállapítani.

L. MASCHERONI (1759–1800) neve gyakran feltűnik BOLYAI JÁNOS kézirataiin. Műve a Geometria del compasso (Pavia, 1792) francia fordítása BOLYAI saját tulajdona volt. Ez a levéltöredék tanúsítja azt is, hogy János olvasta J. MONTUCLA matematikatörténetét.

7.5. Bolyai János levele apjához

A kivánt fölvilágosításra, közmegnyugtatásunkra és a tárgyak annyiban, ezenneli bevégzésére s részint csodámban és szinte rémülésemben az utóbbi levelet – melyet az előtt, már ismerve lényegét, megvallom csak futva vagy könnyüszerüleg néztem át – még tegnap estve figyelmesebben vagy apróbbra véve átolvasván és az igaz valódi szép és jó országában hogy szokott, de időtlen kifejezettel éljek, szerencsére nem lehetvén disharmonia, tehát két ellenkező között egyiknek hamis vagy hibásnak kellvén lennije – a számítási hibát ott találtam röjleni, hogy az otti úton, a $\mathbf{d}X$, $\mathbf{d}^2X$, $\mathbf{d}Y$, $\mathbf{d}^2Y$ *meghatárzásakor elmulatódott az ugyancsak változó* x, y, r *is annak nézetni vagyis az ezekre nézti alképzés kimaradott. Erre ugyanis tekintetet véve lesz, ha idő, tenta s rézpor s fáradság kevesbitésért s mocsokra kevesebb alkalom adásért „*$\mathbf{d}$*" helyett* $\odot$*-t írok, per se*

$$\odot X = c' + \frac{r[2\theta(a-x)w - \theta^2 w \odot x] - \theta^2(a-x)w \odot r}{r^2},$$

s úgy tovább; azonban, bár-is nem állítom, hogy ezen úton is célt ne lehetne érni: teljességgel nem látom sem szükséges-voltát, sem hasznát, sem csinosbítást benne nem találok, ezen sokkal hosszasb, teherményesb, egybe-bonyolódottabb és unalmasb úton járni s keresni azt: mi már az ország-úton könnyön el-érődik és ismés; mind a mellett is, hogy a figyelemre méltó igazság kutatásában éppen magam sem szoktam sem az országúthoz kötni magamat, sem bármekkora tekintély s nehézség által is elijesztetni s éppen jelenleg is néhány óriás sőt Colosz áll előttem, melyekkel meg kell kisértenem a küzdést vagy küldést. Hanem e szögletben nem vala mit tenni; én pedig különösen szeretem oly tani tárgyakat választani áthatás végett, melyek valóban szükségesek, bár hasznosak, legalább jó ízlésüök – És marad vagyis áll tehát e részben az

$$y \odot x + (a-x) \odot y = ac$$

ha tudni illik (a tudva lévő módon elbontott pillanati erőnek az x-ekre ∟ {merőleges} *oldalhatása mint már Vega is állítja. A jobbacska, vagy meglehetősbb vagy legalább középszerű, sőt még a leghalványabb szerzőnél is kivált egy ily eljárt terált tárgyban, nagyon szükséges az ugyan szemes vizsga, mi-előtt az ember botlasztaná, s legelőbb legjobb ha az ember önmagának nem hiszen, mert a sok rossz s időtlen között mondanak csakugyan sok jót, s ügyöst, derekat, talpra-esettet is. De megszűnöm, mert így levélen el-nem-végzem, s az efféle, belátó előtt, úgy is, mind önként bizonyos. Csak azt jegyzem meg erre nézve még,*

hogy furcsa, hogy várakozásom ellen, minden elvétése mellett a számításnak az

$$y\overset{|}{\odot}^2 x+(a-x)\overset{|}{\odot} y=0,$$

per se csak történetesen, jól vagy helyesen jő ki, mind a mellett, hogy még más hiba is csúszik be, tudni illik az otti

$$\overset{|}{\odot} X=c'-\frac{2\theta(a-x)w}{r}\ \text{-ből},$$

az otti módon is, vagyis az alképzéskor, csak θ-t nézve is változónak, nem

$$\overset{|}{\odot}^2 X=\frac{2(a-x)w}{r},$$

hanem

$$\overset{|}{\odot}^2 X=\frac{-2(a-x)w}{r}$$

következnék: de mikor aztán az említett másodrendű $\overset{|}{\odot}$ egyenlet per se nem jőne ki. – Egyúttal Makót is ugyan még az estve nézegettem: jeles, ügyös, érdemes, derék s becsületes szép jellemű ember (munkáját ezennel köszönettel küldvén vissza): de egyéb sürgösbb vagy szorgosbb és nagyobbszerű dolgaim miatt most annyival kevésbbé érkezem, hogy bövöbbön egyébbe elegyedni, hogy a Göttingai s Oxfordi s több efféle millionair. könyvtárakban s a többiben még van tömérdek még derekabb dolog, s végre és főleg az egész Mindenség! ∞ és ∞ fölséges könyve is tárva áll az ember előtt és örökös dolgot ad. – A $\int 0$-nak a $c\,b=c$-ből a $b=1$-nek nem általános következtethetéséveli hasonlatját sem foghatom meg: úgy az $\int$-tan leomolnék, mely pedig minden még abban is leendők mellett, dicsőűl áll és szilárdabban a Sion hegyénél. Azt sem foghatom meg, hogy miképp ne lenne a tanászok előtt érdekes a $\bigcirc$ li $\square$ ra dolga, sőt mi föladat volna még tán az egész tan mezején ennél érdekesbb, szebb és némileg inkább tetőpontját, koronáját tevője a tannak: mint ez: midőn nyilván látszik, hogy hajhássza untalanul az egész tanász-Világ, és sok időtlen-szülött mellett mily gondosan kuporgatják, ha mi szépet találnak evvel érintkezésbe lévőt. Én Isten kegyelméből nem elme-vakon s a priori föltett szándokkal dolgozom: hanem okszerüleg s a hol mi jóra új utat veszek észrenyilni, per se lehetőleg eljárom, mint írám semmi tekintély s nehézség által vissza-nem-rettenvén ezt senki sem teszi: semmi új jó nem születik soha és a Mindenség $\sim$ lesz egy ∞ halotthoz. Lenne csak meg! de csinálna ám akkora lármát éppen az, az egész mathem-Világban! minél tán nagyobb sem volt, hozzá-járulván a jó bőrös pecsenye s megfelelő vagy ahhoz jó kortyok sem hiányozván. – Még egyet! Az igazság is per se nem mind méltó a

fölvételre; mert különbön akkora tan-halmaz kerekednék, hogy a rendezés, idézis és föl-keresés több bajba kerülne az ön-erőni kigondolásnál: mily eset van már is sok könnyeknél, hol az áthatolás, tisztált és érlettség hiányja miatt gyakran unalmasb a kicsinálásnál. Igy, hogy az alg. görbére bárhonnan L *van, arról s bizonyíthatásáról meg vagyok győzödve, mint a*

$$\frac{(f\,k)^3}{\delta^2}$$

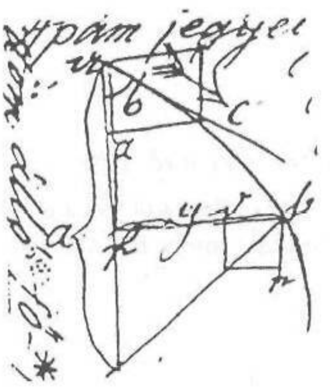
állandóságára nézve is, ha csakugyan igaz: de most fontosb és új vagy eredei tárgyaként ezt nem szükség vitatnom vagy belé-ereszkednem. Afféle viszony számtalan van. A hol pedig járni méltónak találok: ott minden szögletet szeretek eljárni.

Analízist tartalmazó levél (1323/1, 1^v, 2^v, 2). Nincs keltezés rajta.

A levélben BOLYAI MAKÓ PÁL (1724–1793) Compendiaria physica institutio ..., Partes duo, 1762–63 könyvének nézegetésére utal, amely BOLYAI FARKAS tulajdonában volt [36, 45].

7.6. Bolyai János levele apjához

Addig is míg magam oda mennék a szóban forgó kétely vagy fölhő lehető eloszlatására s közmegnyugtatásunkra csodámban egy rövid szót kívántam közölni; bővöbbön ezen magában per se egyik főfontosságú s érdekü tárgyba jelenleg azon okból nem könnyön ereszkedhetvén, hogy a már ottlétemkor említetten kívül is közelebbről még néhány egészen új s ugyancsak legfőbb súlyú tárgy áthatása kisérletjére érzem magamat ugyan szorgosan fölhíva vagy ösztönözve és kötelesnek, gyönyörű új mezők nyílván s dolgok adván elé magukat, a központi mozgástan, mint a gyakorlat vagy használatnak az elméletteli megegyezése is arra mutat vagy int különbön is alkalmasint eljárt dolog lévén bár is teendő per se még csaknem mindenütt van, mint említém, még az oly triviális másodrangú egyenlet tanban is, s természetemben lévén, hogy semmit se szeressek félig csinálni vagyis a tökély előtt megelégedni hol respecteivel minimum a summit discedere. Egyébaránt pedig per se, mihelyt egy kis résem lesz közelebbi vagy előttöm álló fő dolgaimat kissé végezvén, minden olyas, kivált Apámtól, vagyon és főleg érdekel.



A mindnyájunk által elfogadott vagy közmegjegyzés szerinti al-kép- egyenlet t üd főváltozóra nézve, tehát az Apám jegyeivel

$$y\mathbf{d}^2x+(a-x)\mathbf{d}^2y=0$$

melynek bal felöli tagja közvetlenül az az x és y közötti viszonytól függetlenül $\int$*-ezhető és így*

$$y\,\mathbf{d}\,x+(a-x)\,\mathbf{d}\,y=\int 0=const.,$$

mivel mint Apám is írja, ennek al-képe amaz, vagy pedig egyenesen

$$\int y\,\mathbf{d}^2x+\int(a-x)\,\mathbf{d}^2y=const.;$$

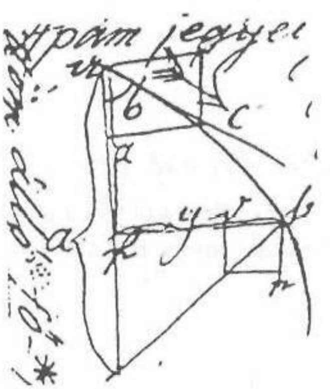
de

$$\int \mathbf{d}^2x=y\,\mathbf{d}\,x-\int \mathbf{d}\,y\,\mathbf{d}\,x,$$

$$\int(a-x)\,\mathbf{d}^2y=(a-x)\,\mathbf{d}\,y-\int(-\mathbf{d}\,x\,\mathbf{d}\,y)=(a-x)\,\mathbf{d}\,y+\int \mathbf{d}\,x\,\mathbf{d}\,y^2$$

7.6. Bolyai János levele apjához

Addig is míg magam oda mennék a szóban forgó kétely vagy főlhő lehető eloszlatására s közmegnyugtatásunkra csodámban egy rövid szót kívántam közölni; bővöbbön ezen magában per se egyik főfontosságú s érdekü tárgyba jelenleg azon okból nem könnyön ereszkedhetvén, hogy a már ottlétemkor említetten kívül is közelebbről még néhány egészen új s ugyancsak legfőbb súlyú tárgy áthatása kisérletjére érzem magamat ugyan szorgosan fölhíva vagy ösztönözve és kötelesnek, gyönyörű új mezők nyílván s dolgok adván elé magukat, a központi mozgástan, mint a gyakorlat vagy használatnak az elméletteli megegyezése is arra mutat vagy int különbön is alkalmasint eljárt dolog lévén bár is teendő per se még csaknem mindenütt van, mint említém, még az oly triviális másodrangú egyenlet tanban is, s természetemben lévén, hogy semmit se szeressek félig csinálni vagyis a tökély előtt megelégedni hol respecteivel minimum a summit discedere. Egyébaránt pedig per se, mihelyt egy kis résem lesz közelebbi vagy előttöm alló fő dolgaimat kissé végezvén, minden olyas, kivált Apámtól, vagyon és főleg érdekel.



A mindnyájunk által elfogadott vagy közmegjegyzés szerinti al-kép- egyenlet t üd főváltozóra nézve, tehát az Apám jegyeivel

$$y\mathbf{d}^2x+(a-x)\mathbf{d}^2y=0$$

melynek bal felöli tagja közvetlenül az az x és y közötti viszonytól függetlenül $\int$*-ezhető és így*

$$y\,\mathbf{d}\,x+(a-x)\,\mathbf{d}\,y=\int 0=const.,$$

mivel mint Apám is írja, ennek al-képe amaz, vagy pedig egyenesen

$$\int y\,\mathbf{d}^2x+\int(a-x)\,\mathbf{d}^2y=const.;$$

de

$$\int \mathbf{d}^2x=y\,\mathbf{d}\,x-\int \mathbf{d}\,y\,\mathbf{d}\,x,$$

$$\int(a-x)\,\mathbf{d}^2y=(a-x)\,\mathbf{d}\,y-\int(-\mathbf{d}\,x\,\mathbf{d}\,y)=(a-x)\,\mathbf{d}\,y+\int \mathbf{d}\,x\,\mathbf{d}\,y^2$$

melyet az előbbivel öszözve, ki jő az említett és ugyancsak senki által el-nem – vitázott s nem is ostromolt vagy megtámadott elsőrendű al-kép – egyenlet, integrál egyenletül: hol $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$ *iránylag vagy respective az x iránnyal* $\parallel \mathfrak{bn}$, *és ami* $\perp \mathfrak{db}$ *iránybani söbök vagyis sebességek.*

És itt már nem tudom vagy értem mi okból és joggal lehetne tenni $\mathfrak{d}y$ *helyébe* $(c-\mathfrak{d}y)$*-t, valamint azon állítmányt is hihetőleg csak valami errorboli vétségnek találom, hogy* $y\,\mathfrak{d}x+(a-x)\,\mathfrak{d}y=0$, *az x-nek bármely becsére nézve.*

Hanem a dolgot szabályszerű rend szerint én is így gondolom bevégezni, hogy a már talált $\int$*-egyenletben legelőbb is a const. lehető meghatárzásához látunk vagy fogunk vagy kezdünk, vagy azt ügyekszünk teljesíteni vagy megtenni vagy véghez vinni vagy hajtani vagy megkisérteni s a t.*

Már pedig erre nézve a mozgás kezdetén vagyis $\mathfrak{a}$*-ban, ha először b vagyis* $\wedge ac$ *nem* $>$ *R (ecto); úgy* $x=0$, $y=0$, $\mathfrak{d}y$ *pedig c-nek illő decompositioja által könnyön láthatólag* $=c\sin b$, $\mathfrak{d}x$ *pedig* $=c\cos b$, *mi becseket a főlöbbi* $\int$*-egyenletben helyettesítve, lesz*

$$0\cdot c\cos b+(a-0)\,c\,sin b=const.$$

és így jelen különös esetben vagy adatok szerint vagy ahhoz képest, $const = =ac\sin b$ *és tehát*

$$y\,\mathfrak{d}x+(a-x)\,\mathfrak{d}y=ac\sin b$$

határozottan vagy kifogás nélkül.

Ezen egyenlet balfelöli tagja már ugyan többé nem az x és y közötti viszonytól függötlenül $\int$ *ezhető, azonban mindkét tagot, jelesen az elsőnek második izét ezen isméskép szerint* $\int u\,dv=uv-\int v\,du$, $\int$*-ezni kezdve, kijő*

U.I. Ha $b\wedge > R$ *úgy lehet, hogy valamely a* $\mathfrak{cg}$ *-hez magához asymtotailag közelítő görbére nézve is az elsepert terj* {felület} $\to\infty$ {tart végtelenhez}. *Egyébaránt ezen esetre is kiterjeszthetni, ha a testet útja bármely pontjából ugyanazon t söbbel sürgetve gondoljuk; de mit itt most nem folytathatok.*

Analízis tárgyú levél (734/1, 1^v, 2, 2^v). Keltezés nélkül.

7.7. Bolyai János levele apjához

Szüvösön köszönve a herpesre nézti tudakozódást és holnaprai invitátiót, holnap délután oda is ügyökszöm.

Az pedig, hogy ha p prím s $q > 1$, *de* $< \frac{p}{2}$*: úgy p-vel osztva* q^2 *a pót* {maradék} *nem 1, nem áll. Ugyanis nem csak ha prím, hanem bármely reális* {egész} *szám legyen p,* $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ *nyilván oszlik p-vel, mihelyt vagy* $a+1$, *vagy* $a-1$ *oszlik p-vel, azaz: mihelyt a vagy* $kp-1$, *vagy* $kp+1$ *idomu. És aztán a Disq. Ar. §4-je szerint éppen mindig lesz oly* $q < \frac{p}{2}$ *is, hogy* $\frac{q^2-1}{p}$ *egész legyen; tudni illik a-t p-vel osztva a leg < két féle (úgy mint + és -) maradványok* {maradékok} *< bbikét véve q-nak.*

Mit is kívánatra ezennel kívántam közölni, hívén, hogy kis közelebbi megtekintés után nem is lesz vala erre szükség.

Egyébaránt én is nagyon kötve hiszek magamnak úgy, hogy lehető minden bíráim öszvösen sem bírálhatnak keményebb és kiméletlenebb szigorral meg, mint önmagam de azért amit lehet ösztön – {a levélből egy rész ki van szakadva} *ség szerint csak megteszünk.*

A gyomor fájdalmon tudván azt, hogy minden tanátsom fölösleges csak sajnálhatom, fájlalhatom azt: csakugyan kis fodorminta szeszt iddogálni nem volnae jó? –

Rövid levél (746/1). A keltezés tekintetében tanácstalanok vagyunk. Tartalma alapján feltételezhetjük, hogy az 1850-es években íródott.

Egy elírás van benne. A $\frac{q^2-1}{p}$ helyett $\frac{q^2+1}{p}$-t kell olvasni (l. (7.11.§) Dem.3).

7.8. Bolyai Farkas levele fiához, Jánoshoz

Szász Károlynak el is küldöttem a választ: csodálkozom, hogy az ezer teendők közt úgy elfelejtettem: hogy confirmálni {igazolni} is lehet oly hamar, melyet többként lehet két quadratra osztani, $4n+1$ kép alatti prímet lehet, de csak unica módon {bizonyos természetes számokat többféleképp állíthatunk elő két négyzet összegeként (pl. $1105 = 33^2 + 4^2 = 32^2 + 9^2 = \ldots$), a $4n+1$ alakú prímek esetén ez a felírás egyértelmű (4.5.§)}.

Megvénült az ember.

Jakab János haza jött a borvízről kérdezte a Paganinit: kérlek próbáld el.

Az a fehérnép éppen akkor vitte a holmiját el összevesztek.

Egy kis cédulára (1194/1) írt rövid levél. Mivel SZÁSZ KÁROLY (1798–1853) 1848 és 1853 között tartózkodott Marosvásárhelyen, a levél valószínűleg ebben az időben keletkezett. A $4n+1$, alakú prímekre vonatkozó megjegyzés alapján keletkezését inkább a fenti időszak végére tehetjük.

Másrészt a Paganinire való utalás gondolatainkat arra a hangversenyre irányítja, amelyen BOLYAI JÁNOS is fellépett, s ott Paganini műveiből adott elő részleteket. A jótékony célú hangversenyt 1843. május 4-én tartották [12, K.25/6], így azt is feltételezhetnénk, hogy BOLYAI FARKAS levelét Jánoshoz korábban írta. János 1856. május 31-én VÖRÖSMARTY MIHÁLY özvegye és árvái fölsegítésére az Apollo- teremben rendezett hangversenyen ismét eljátszott néhány hegedűszámot, többek között Paganinit is (244/1), de ekkor SZÁSZ KÁROLY már nem élt.

MAROSVÁSÁRHELYT

Csütörtökön. Május 4-kén 1843-ban

a' helybeli *Lutheri Szentegyház'* segíllésire

AZ APOLLÓ-TEREMBEN

Mű-kedvellők által

adódik

HANG-VERSENY

KÉT OSZTÁLYBAN.

ELSŐ OSZTÁLY:

1. Nyitány: bűvös vadászból, Wéber C. M. től
2. Kettős-dal Paccinitől, „La Sposa fedele“ nevű dal-játékból Nagy Károly és Szathmári László által.
3. Polonoise Maysedertől; azután Paganini' Caprices-eiből és Sonatáiból: Maestoso, Adagio con dolcezza, Presto, Innocentemente, cs. k. kapitány Bolyai János által. *
4. Magány-dal Zámpából, Héroldtól, Szathmári László által.
5. Kar-ének az „Egy óra“ nevű melodrámából.

MÁSODIK OSZTÁLY:

1. Nyitány Oberonból, Wébertől.
2. Magánydal Varás Sipból, Mozárttól, Nagy Károly által.
3. Paganini Caprices-iből és Sonatáiból: Agitato, két Amoroso, Corrente, Presto; cs. k. kapitány Bolyai János által
4. Quartette Oberonból. Wébertől.
5. Kar-ének, Edinburgi tömlöczből, Caraffától.

Szent czélra nemes indulatból vállalkoztak keresztény részvétre számitnak azon reménnyel: hogy azon éldeleten kivűl, mellyel a' középszerűen is jádzott remek darabok tápluljják a' lelket, ezen zenét az is szépíti, hogy úgy jelenik meg, mint anyja a' köz-atya tiszteletére szólandó új hangoknak; ha midőn a' halotti lepedő alól feltámadott természet, mint egy fel-virágzott 's gyöngyözött mátka a' réá mosolygó nap' elibe lépik a' megzendülő köz-templomba, ezen nagy hármoniához, a' Lutheri keresztények' ezen városbeli kis templomából is egy új kis orgona' hangja járulhat.

Bémeneti díj: elsőhely 50 xr. másodikhely 25 xr. karzat 15 xr. v. c.

Kezdete pontban 7 órakor.

Belépti jegyeket lehet váltani a' szinház' kűlteremében.

* A' csak mások kivánságukra ezeknek előadását vállalt jádzó megelégszik, ha azon colossalis művésznek, itt még csaknem egészen ismeretlen, maguk nemökben egyetlen nagyszerű, de épen oly rendkivül is nehéz és magán Paganinin kivül más által alig hozzá hasonlólag utánzott 's előadásra választatni nem is szokott remekei merényével a' tisztelt közönségnek bár némi kis fogalmat lesz képes adni: annyival inkább, hogy más rendeltetést nézve, a' hegedűt mindig — közelebbről régóta — mellőzte

A hangverseny színlapja (244/1)

7.9. Bolyai Farkas levele fiához, Jánoshoz

Ha a, b, c egész számok és $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ egész szám ez vagy két egész quadrát summája {két egész szám négyzetének összege}, vagy egész quadrát {teljes négyzet}.

Mert $\frac{a^2}{c^2}=r^2$, s $\frac{b^2}{c^2}=s^2$, ugyanitt $\frac{a^2}{c^2}=\left(\frac{a}{c}=r\right)^2$, s $\frac{b^2}{c^2}=\left(\frac{b}{c}=s\right)^2$. Tehát $\frac{a^2+b^2}{c^2}=r^2+s^2=\alpha$.

Ekkor r vagy egész, vagy (rational akkor is ment.) tört: ha egész úgy s is egész midőn α egész s ha r tört, s is tört.

Ha r, s egészek; úgy $\alpha=r^2+s^2$ két egész quadrát summája.

Ha r, s törtek úgy α quadrát.

Most gondoltassék oly rectang {derékszögű} $\triangle$, melyben az átfogó $\sqrt{\alpha}$ s egyik végéni szög v, s az azzal szembeillő befogó $r=\sin v\cdot\sqrt{\alpha}$

Hogy r rational legyen $\sin v$-nek olyan $\sqrt{k}$-nak kell lennie, hogy $\sqrt{k\alpha}$ rationál legyen. $\sin v=\sqrt{1-\cos^2 v}$, tehát $k=1-\cos^2 v$ mely rationál mert $=\sin^2 v$ s $\cos^2 v+\sin^2 v=1$.

(N.B. Minden sinus nélkül lehet $r=\sqrt{k\alpha}$, s $k<1$ s hogy $\sqrt{k\alpha}=\frac{m}{n}$ legyen, k-nak $=\frac{m^2}{n^2}\alpha$ kell, tehát $\ldots=\ldots=$.)

Azonban $k<1$ s $\sqrt{\alpha k}$ csak akkor lehet rationál tört $\frac{m}{n}$ ha v olyan, hogy $k=\frac{m^2}{\alpha n^2}$ amikor is $\sqrt{\alpha k}=\sqrt{\frac{\alpha m^2}{\alpha n^2}}=\sqrt{\frac{m^2}{n^2}}=\frac{m}{n}$.

Minthogy k tört edj {egy} $m^2<n^2\alpha$: legyen $m^2=\varphi^2 k\alpha n^2$ hol φ tört edj. S legyen $\varphi=\frac{t}{\ldots il\ldots}$ legkisebb kifejezésben s i, l legyenek prímek.

Hogy $\frac{t^2n^2\alpha}{(i\cdot l\ldots)^2}$ egész szám legyen $=m^2$; le kell rontattni $(i\cdot l\ldots)^2$ nek: t^2-ből $i, l\ldots$ közül semmi se rontatik le és legkisebb kifejezésének n^2-nek vagy factora $(i\cdot l\ldots)^2$ egészen vagy csak egy része, vagy egyik sem: az első esetben ha marad n^2-ből valami, az quadrát, legyen p^2, tehát $m^2=t^2p^2\alpha$, és így α

quadrát; ha semmi sem marad, úgy $m^2 = t^2\alpha$, tehát α quadrát. A második esetben maradjon n^2-ből z^2, a többinek α-ból kell lebontattni; maradjon α-ból u lesz $m^2 = t^2z^2u$, tehát u quadrát és így α is.

Szintúgy van ha n^2-ből semmi se rontatthatott le, s ismét α ból rontattván le y maradt, $m^2 = t^2n^2y$, tehát y quadrát és így α is.

Innen két törtek quadrátai summája csak úgy lehet egész szám, ha ez vagy két egész quadrát summája, vagy egész quadrát.

Ha pedig két quadrátoknak (akár egészek, akár tört …) summája egész: úgy ez számtalanképpen kifejezhető két törttek quadrátja summájával.

Ugyanis legyen f az adjik {egyik} s a másik ϱ, $f > \varrho$; s legyenek $f - z$ s $yz - \varrho$ azon két quadrátok oldalán, melyeknek summája $f^2 + \varrho^2$ legyen.

Hogy

$$(f - z)^2 + (yz - \varrho)^2 = f^2 + \varrho^2$$

s ebből

$$z = \frac{2f + 2\varrho y}{y^2 + 1}$$

s y helyébe kell csak számot tenni.

Például $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1^2 = 1$

Ha $y = 1$: úgy $z = \frac{7}{5}$ $\{z = \frac{2\frac{4}{5} + 2\frac{3\cdot 1}{5}}{2}\}$ s $f - z = \frac{4}{5} - \frac{7}{5} = -\frac{3}{5}$; s $yz - \varrho = \frac{4}{5}$, s $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Ha $y = 2$; lesz $z = \frac{4}{5}$, tehát $f - z = 0$, s $yz - \varrho = 1$, s $0^2 + 1^2 =$ $= 1$. Ha $y = 3$; lesz $z = \frac{13}{25}$, tehát $f - z = \frac{7}{25}$, $yz - \varrho = \frac{24}{25}$, s $\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 =$ $= \frac{625}{625} = 1$. Ha $y = 10$; lesz $z = \frac{68}{505}$ s $f - z = \frac{336}{505}$, $yz - \varrho = \frac{377}{505}$, s $\left(\frac{336}{505}\right)^2 +$ $+ \left(\frac{377}{505}\right)^2 = \frac{112896 + 142129}{505^2} = \frac{255025}{255025} = 1$.

Az aequinoctiummal {napéjegyenlőséggel} változásaim vannak – s minden reggel egy darabig kell harcolnom, hogy a bút egy napra legyőzzem – : sem itt nem tudok maradni, sem elmenni; – csak a halál rághatja ketté a már oldhatlan bogot.

Ennyi minden bú feledés közt is egy szomorú jelentést kelle írnom B. Kemény Pálné kérésére s megint olyan kérésre melyre nemet nem mondhatok, kemencézni kell mennem.

{A levél első lapjának felső részén (1117/1)}: Cserébe a $4m+1$ alakú prímek leg-adjszerübb {legegyszerűbb} demonstrátióját várom.

{A mondat után János megjegyzése}: *Conversa is igaz így: bármely pozitív páratlan prímnek csak egyként két egymáshoz prím □-ra oszló szám prím.*

{A levél üresen maradt részein, néha a sorok között is olvashatjuk Bolyai János bejegyzéseit. Például (1117/1^v)}: *Így is helyes út: ha a pozitív a nem 2 □ szám öszvege úgy 2 pozitív ∩□-te sem. Mert ha* $a=\left(\frac{m}{r}\right)^2+\left(\frac{n}{r}\right)^2$, *úgy* $ar^2=$ $=m^2+r^2,\ r^2=\frac{(m\dotplus n)(m\dot{-}n)}{a}$, *tehát mivel a al(ut) prímszám (§) vagy* $m\dotplus n$, *vagy* $m\dot{-}n$ *oszlik a-val, sőt nyílván akkor mindenik, tehát* $r^2=a(s^2+t^2)$; *tehát* s^2+ $+t^2=db^2=r^2$.

A levelet (1117/1, 1^v, 2) BOLYAI FARKAS röviddel báró KEMÉNY PÁL malomfalvi földbirtokos 1854. április 15-én bekövetkezett halála után írta. Erre a B. KEMÉNY PÁLNÉ kérésére való utalásból következtethetünk.

Irásában BOLYAI FARKAS egy számelméleti tétel bizonyítását közli fiával, s ugyanakkor javasolja Jánosnak, hogy készítse el a legegyszerűbb bizonyítását a $4m+1$ alakú prímszámok két négyzet összege alakjában való előállításának („Cserébe a $4m+1$ alakú prímek ..."). Láthatjuk, hogy Farkasnak ez a felszólítása János felé nem az 1840-es években történt, amint azt STÄCKEL BEDŐHÁZI JÁNOS nyomán állítja [106, 1:96].

BOLYAI JÁNOS válaszát a (4.5.§)-ban ismertettük.

7.10. Bolyai János levele apjához

Az abbéli nyughatatlanság elenyésztésére kivánom ezennel a még tegnap estve, néhány perc alatt gondolt két reménylem nem inelegánsnak találandó s általjában megkedvelendő okadatot {bizonyítást} *némi előízletül, és a még ennél is, bár is ez is nagyon fontos és szép, ezerszer, sőt, a mennyiben bizonyos már az egész számtant is átható és kimerítő kulccsal vagy eszközzel bírok, mondhatni* ∞ *szer > bakra nézve több hitel nyerésre, közölni. Azon a számtanban mindenható kulcs pedig abban áll, hogy midőn már a másod rangú számi csak két ismeretlenű egyenletet is, csak egy La-Grange volt képes és Gauss föloldani (nem kevés bajjal), s az utóbbi még a 3 ismeretlenüt is, ha homogénea szerencsés és dicsőségesen föloldotta: de ott belé is fáradva úgy is el-áll, hogy kénytelennek látja magát minden további lépést a tanászok különös figyelmébe ajánlani, s az arra nézte ipart szüvükre kötni: de a mely dolog természete szerint in* ∞ *bonyolódott s amennyiben nehezülő úton alig léphetend ember legalább sokkal tovább és melyet én meg se kisértek: nekem, miután magam is némi gondolkozás után szinte desperálék* {elvesztettem a reményemet}, *azaz erre nézve reményvesztetten csendesen le akarék mondani róla, vagyis annyiban hagyni, egyébhez látandó, Isten kegyelméből, hála érte! sikerüle bármily mind algebrai, mind transzcendens számi egyenletek teljesen, mégpedig akár csak* $\cap$ *azaz rational becsek, akár éppen számok kívántassanak resolválni. Üd-tani vagy (még) fölsőbb kérdés aztán,* $\cap$, *al-uti, sőt bármint szabályzott exponens vagy egyéb föltételeket is odabocsátani és üdi vagyis nem számi (vagy számtalan?) több változójú egyenleteket is (N.B. általános adva – 1 – idomú becs nyilván csak az egyenletek számát szaporítja oly becsekkel föloldani: melyek bármely adva 1,* $\cap$, *vagy számok, legáltalánosb. Például imag. prímek,* $4m+1$ *idomú prímek, ... És ez, mint már bármely* ∞ *szer ... eldönteni). És még sok efféle. De torrens* {zuhatag} *módjára omolván a legderekabb eszmék, mielőtt érkezném egyebeket is, tisztára írva közölni, ezt sietve elküldöm.*

N.B. És a már Euklid által vizsgált tökély számok fogalma s tudja, azon, már sem a Régiek, sem tudtomra az újabbak által nem érintett, hogy minden oly szám megadódjék (+ is {komplex is}*) annál nevezetesb, hogy a számtan tetőpontja.* {Ezek a sorok olvashatók, jobb megfogalmazásban a $800/1^v$ oldal alján, l. 7.12. levél}

Azt sejtjük, hogy ez a levél (495/1), vagy inkább fogalmazvány is az 1854–55-ös években íródott.

7.11. Bolyai János levele apjához

Jelentsen itt a theor.-ban kijelelt kivétellel bármely algebrailag használt betű 0-tól különböző pozitív számot. Teljesítem még pedig mindkét egymással némileg rokon okadatot {bizonyítást}, *mit első tekintetre nem hivék, hogy lehessen, a* $4m+$ $+1$ *nélkül.*

Theor. ha a nem öszvegje két □-számnak, vagyis mi evvel mindegy (egyettevő), a-nak nincs elegy (imaginárius) {olyan $m+ni$ alakú komplex szám ahol $m \neq 0$, $n \neq 0$} *osztója; azonban*

$$a = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{d}{c}\right)^2 = \frac{b^2+d^2}{c^2}$$

úgy a □-szám.

Vagyis: Ha $a = \dfrac{b^2+d^2}{c^2}$, *úgy a vagy □-szám, vagy két □-szám összvegje.*

Vagyis a következő idomjának a theorémának a 0-t is befoglalva a számok közé, ha a nem összvegje két □ számnak úgy két ∩ {racionális} *□ nak sem összvegje* {[102, 352 old.] Corollary}.

Vagyis: Ha a összvegje két ∩□ számnak: úgy összvegje két □ számnak is.

Dem.1. Ha $a = er^2$ *és* $r > 1$, *vagyis a az 1-nél > □ számmal oszlik: úgy* $\dfrac{a}{r^2} = \dfrac{b^2+d^2}{c^2+r^2} = \left(\dfrac{b}{cr}\right)^2 + \left(\dfrac{d}{cr}\right)^2$ *és* $\dfrac{a}{r^2}$ *sem* $= s^2+t^2$, *azaz két □ szám összvegjéhez: mivel különbön föltét ellen* $a = r^2(s^2+t^2) = (r\,s)^2 + (r\,t)^2$, *tehát a = két szám □jához. Ha pedig* $\dfrac{a}{r^2}$ *□ szám: úgy* $\dfrac{a}{r^2}r^2$ *is az. Tehát elég már a theo. csak oly □ szám osztoktól ment a-ról dem.* {Ezt a részt Bolyai igen apró betűkkel két sor közé és a levél oldaljegyzetébe iktatja}.

A föltétből 1) a $c^2 = b^2 + d^2$,

$$c^2 = \frac{(b + d)(b - d)}{a} \qquad \left\{c^2 = \frac{(b+di)(b-di)}{a}\right\}.$$

Már szükséges és tudom is azon theorémát az imaginárokra is kiterjeszteni, miszerint ha egy szám a két szám factumát {szorzatát} *osztja mint itt a* $(b + d)(b - d)$*-t, úgy áll a oly két factora* {tényezője} *e, f melyek közül az egyik az előbbi két factor egyikét, a másik a másikat osztja. (Ha a maga oszsza valamelyiket: úgy a mértárs* {a másik osztó} = 1.).

Legyen tehát $a=ef$, *és*

$$\frac{b\oplus d}{e},\quad \frac{b\ominus d}{f}$$

egész. Mivel a*-nak föltétel szerint nincs* *<u>elegy</u>* *osztója: mind* e, *mind* f *<u>tiszta</u>* {$m+$ $+ni$ alakú komplex szám, ahol $m=0$, vagy $n=0$} *lesz, még pedig legyen a legelső föltét szerint mindenik pozitív. Ha* l *a leg->köz-osztója* e, f*-nek és* $e=lm$, $f=$ $=ln$*: úgy mivel* $\frac{b\ominus d}{l}$*-t* m *is,* n *is osztja, a prímek kiterjesztett theoriájából* (m, n *pedig prímek egymáshoz)* $m\,n$ *is oszsza* $\frac{b\ominus d}{l}$*-t, tehát* lmn *a* $b\ominus d$*-t.*

Mi okoskodmányt folytatva, világos, hogy ha *<u>mind</u>* *ily eset jőne elő: úgy, mivel* a*-nak nem lehet* ∞ *sok, 1-nél > osztója, egykor a mind □-szám osztók factuma, tehát maga is □-számul tűnik föl.*

<u>Dem.2.</u> *Ha* m *az* n*-hez prím:* *<u>úgy</u>* *a prímtanból,* $l\,m\,n$ *is oszsza* b, d, $b\oplus d$, $b\ominus d$*-t; és ha rövidségért* $g=m\,n$, $h=\frac{b}{l\,g}$, $k=\frac{d}{lg}$, *úgy nyilván lesz* $\frac{b\oplus d}{l}\cdot\frac{b\ominus d}{l\,g}=$ $=g(h\oplus k)(h\ominus k)=g(h^2+k^2)$*; tehát (1)-ből* $c^2=g(h^2+k^2)$. *Az előbbi eset szerint, szabad a* g*-t is, mivel* a*-t oszsza, minden 1-nél > □-szám osztótól mentnek tenni föl, miszerint nyilván* $\frac{c^2}{g}=h^2+k^2=g\,s^2$, *tehát* $g^2s^2=t^2=h^2+k^2$. *(Ez egész demonstrátiókat lehet s kell szép logikai renddel a különböző osztály- s alosztályokkal előadni; mire most nem érkezem).*

Már mivel a *az 1-nél > □ számmal nem oszlik (föltét szerint) nyilván* $l=1$, *mivel ekkor az* a*-nak osztóji prímek egymáshoz, tehát* $g=a$*; de* $h=\frac{b}{a}$, $k=\frac{d}{a}$. *És így* $a\,s^2=h^2+k^2$ *mely az (1)hez hasonló egyenlet, csakhogy* b, d, c *helyett* h, k, s *kisebb számok* {utóbbi két szó kihúzva} *állnak. Az előbbi módot tehát ez utóbbi s bármely így nyerendő egyenletre is alkalmazhatni: mi által* h, k *is folytonoson bárhányszor osztódhatnak* a*-val, azaz* a*-nak bármely szám exponentü potenciájával: mi pedig nyilván csak úgy lehet, ha* $a=1$. *Miszerint meg van mutatva, hogy ha* a *nem oszlik 1-nél > □ számmal, s nem két □ szám öszvegje, de öszvegje két ∩□ töröttnek: úgy* $a=1$, *miből fölöbbi szerint a theoréma igazolva van.*

János ebben (495/1^v, 2, 2^v) az írásában apjának a (7.9.§)-ban vizsgált tételével foglalkozik. Bizonyítása „*derék szolgálatot tesz*” majd a következő, 7.12. levélben, amelyet másnap írt.

Nem tudjuk, hogy ez a levél pontosan mikor íródott. Csak annyi bizonyos, hogy 1854. április 15. után és 1855. májusának vége előtt (l. a 7.12. levélhez fűzött megjegyzést).

A 495/1^{v}, 2 oldalak kihúzásokkal, betoldásokkal vannak tele, sok utólagos bejegyzés olvasható a sorok között a régi sorokra ráírva. A későbbi bejegyzéseknél a saját maga által szerkesztett betűket használja János, ezért arra gondolhatunk, hogy miután apjától visszakapta sokat javított első fogalmazásán. Megértjük a levélben tett megjegyzését: „*Ez egész demonstrátiokat lehet s kell szép logikai renddel ... előadni ...*"

Ugyanezekkel a gondolatokkal még a német nyelvű 745/4, eléggé összevissza firkált oldalon is találkozunk.

7.12. Bolyai János levele apjához

A tegnapi első theoréma demonstrációját per se {persze} *a* (4*m* + 1)-*gyel is könnyön véghezvihetni. Azon kívül és föül* {fölül} *van még más hatalmasb és előre tudhatva, sikeres vagy sikerülő generális módom, mint mindjárt megirom, bármely számtani föladat megfejtésére. Ezennel bevégzem a' 2dikét is, leveleimet, miután nem lesz több szükség rájuk, mivel nem érkezem most újra leírni, visszaváró.*

Ha ezen speciale theorémák demonstrációji reménylett jól fogadtatnak: rövid időn készülök, mi már még saját rengeteg várakozásomat is messze fölülmúlja, és első tekintetre hiszem (hogy) képtelen vagy igen merésznek tetszik, az egész ∞ számtant átható, vagyis arra nézve éppen mindenható vagy általános kulccsal szolgálni: mi per se azt nem teheti, hogy minden speciale theorémába viszony vagy tulajdonába a számoknak belé- és leereszkedjék s azt merítsem ki: hanem abban áll, hogy néhány kevés oly methodust adok a Világ kezébe, mely által éppen úgy képes bármely föladatot, a számokat illetően, széles e Világon megfejteni mint generális formulákat különös esetekre alkalmazni. Még pedig következőleg. Midőn már a másodrangú számi, csak két ismeretlen- egyenleteket is La Grange után, csak egy Gauss volt képes számok s az utóbbi ∩ {racionális} *quantitjuk* {értékük} *által is, még pedig (azon tény egy lévén az emberi elme legszebb vagy gyönyörübb és nagyobb vagy mélyebb és nehezebb, öszvebonyolódott vagy összerakodott, legtöbből állóbb művei közül) nem kevés bajjal, készülettel, dicsőségesen föloldotta ugyan, (Disquisitiones arithmeticae 216,300.§) de ott belé is fáradva (mint láthatni §266-ból, mi utóbbit legalább jó és könnyű lesz megolvasni), úgyis eláll, hogy kénytelennek látja magát, minden további lépést a tanászok különös figyelmébe ajánlani, s mint több helyt teszen, arra nézti iparjukat szüvükre hatólag kötni: de amely a dolog mód természete szerint in ∞ bonyolultabb, minden 1-gyeli szaporodásával határzatlan- vagy isméslenek* {ismeretlenek} *számának mint a functio rang- vagy gradusának is, egy egészen új vagy különös methodust és theoria teremtését igényli és már Gaussnál elég nehéz minden lépttel annyira nehezül, hogy oly módon bajosan hiszem, hogy ember, legalább sokkal tovább mehessen és milyet azon úton én meg se kisértek módom szerint mindenütt célt érthetvén (az úgy haladást már jövő életekre halasztva); s végre bármeddig menve is azon az úton, a ∞ csakugyan ki- nem - merítődhetnék: nekem, miután magam is némi gondolkozás után, az általam kitűzött cél elérésére nézve, szinte reményvesztetten a Gaussnál is ebben egy lépést is tovább tehetésre nézve csendesen le akarék mondani azon vizsgáról vagy is azt annyiban hagyni, másokra bízva, egyébhez látandó: Isten kegyéből, hála érte! sikerüle, bármily és bárhány mind algebrai, mind transzcendens számi egyenleteket*

(mi utóbbi nemüökre már egy Gauss maga még csak föl se mer nézni s alig fordult meg esze ágában is, sőt az algebraiaknál is csak a homogeneakat említi (§266)) teljesen még pedig minden félét akár számokkal (még pedig a mint tetszik az exponenseket s még bizonyos valamit, melyeket itt mindig realisoknak teszek föl kivéve az imaginárokat is befoglalva, miről már Gauss megint még csak nem is szól, akár más bármely föltétek alatt), akár csak ∩ *quantitas által (ha exponensben jönnek is elé) rezolválhatni, azaz arra biztosan vezető általános methodust megadni. A prímek kirekesztő formulájának is már nincs kételyem, hogy, még pedig rövid időn sikerülnije kell, még pedig bármi idomuak legyenek. Utinam Gauss superstes esset!* {Bárcsak Gauss még élne!} *erre és még sok más* ∼ *lókra eléggé és legtekintélyesebb méltányolhatására nézve is.*

De torrens {zuhatag} *módjára omolván (mint ruit* {rohan} *profundo Pindarus ore* {dús Pindarus szavú}, *bár is én itt semmit se járok correct conceptus (rendszerező összefoglalás) után, nyakra főre sietve) a legderekabb és, a tanban, hatalmasb eszmék, csak az elfeledés elleni hírtelen papírra vetésre is idő kell, úgy, hogy alig győzöm ezt még mind eddig is. Azonban közelít azon határidő, mikor már elérve a kitűzött célt, a meglévő anyagot kezdem kireszelve, símitva, fényesítve (mi utóbbi azonban nem a szemnek, csak a tanban jó) egyszóval kimüvölve, tökélyesítve tisztára és kitelhető jól és kellemesen olvashatólag írni. A fölöbbi vala az értelme azon képtelennek tetsző állítmányomnak, hogy az egész számtant, per se nagyjában a leg>szerüleg, áthatottam és midőn az által (a készülő prim-tannal) bármely, tehát a Disq. Ar.-nak is bármely theorémáját procerto* {bizonyosan} *megmutathatni, problémáját rezolválhatni és így, erre nézve, az egész Disq. Ar.-t. zsebbe tehetni ugyan: noha másfelől, azon ABC-je az ő módjának, sajátságos és sokkal nehezebb volta miatt mind az enyim mellett is, örök megtartást és >ra becsülést, respective bámulatot érdemel. E szerint a* $2^{2^m}+1$, *annál ezerszer cifrább, bármily egybe rakottak tárgya is per se át van hatva, noha, mint nem csoda, azon speciális esetre alkalmazni még nem érkezem. És nevezetes, hogy a már Euklid által vizsgált tökély-számok, a tan gyermekkorában azon (tudtomra ugyan sem a Régiek, sem az újabbak még csak nem is tett) hozzátétellel, hogy minden oly szám megadódjék, oly egyenletre vezet mely a számtan tető-pontja elérését igényli. Ugyanis arra még az sem elég, az illető transzcendens egyenletet számokkal solválni* {megoldani}, *hanem a radixoknak expresse prímeknek kell lenniük.*

– Végre, hogy neláttasson képtelenséget állítni: a tiszta matematika kimeríthetésére nézve még egy szót. A számtanra nézve ott áll a dolog, hol írám. Az (időtlenűl rosszúl úgy nevezett) Analisisben pedig bármely kérdést legalább végetlen sor által bizonyosan megfejthetni s tehát további kérdés csak

ezeknek megadott egyszerű alakbani összözhetését illetheti. Itt is már ugyan tömérdeket tettem: de bármely sorra nézve csak eldönteni is, hogy lehet e például algebrailag kitenni vagy nem {Tintával áthúzott mondat: *már túl vagy kivül esék jelen hatásomon s határkörén úgy hiszem bármely véges okos lénynek itt is tehát ∞ sok föladat marad in ∞, az ez utáni életekben solválandó lát*} *még nem tudom módját. Csak-ugyan itt is jót reménylek. Az ür-tan pedig át-van hatva. Az erő-tan is, kivált a kemény testekrőli nagyban, mint a számtan s a többi.*

Most a jelen dologra.

A tegnapi kezdet szerint, Dem.1.-ben (hol a leg-> köz-osztó el-hagyandó)
$\frac{x^2+1}{p}=\frac{(x\dotplus 1)(x\dot{-}1)}{(a\dotplus b)(c\dotplus d)}=\frac{(x\dotplus 1)(x\dot{-}1)}{(a\dot{-}b)(c\dot{-}d)}\left\{\frac{(x+i)(x-i)}{(a+ib)(c+id)}=\frac{(x+i)(x-i)}{(a-ib)(c-id)}\right\}$, *tehát*
$\frac{p}{a\dotplus b}=$ {Két sor között apró beírás ceruzával: *Másképp* $\frac{p}{a\dotplus b}$, *tehát* $\frac{p}{a^2+b^2}$, $\frac{p}{c^2+d^2}$ *egész tehát, ...,* $p=a^2+b^2=c^2+d^2$.}

$$=\frac{ap}{a^2+b^2}\dotplus\frac{bp}{a^2+b^2}$$ *egész: de a is, b is,* $<a^2+b^2$*: tehát ez amazok egyikét sem oszthatja; és így az* a^2+b^2 *valamely 1-nél > mérője* {tényezője} *a p-t oszsza, vagyis lennie kell a p-nek az* (a^2+b^2)*-tel valamely, 1-nél> közosztójának. De p pozitív prím lévén, más pozitív számmal, saját többösin (multiplum) kivül, íly osztóval nem bír. Tehát*

$$a^2+b^2=cp,$$

és így $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ *is egész, azaz c közosztója a, b-nek. De c nem lehet > 1, mivel különben* $\frac{p}{c}$ *egész, s p prím lévén,* $c=p$ *s tehát*

$$\frac{p}{p\left(\frac{a}{p}\dotplus\frac{b}{p}\right)}=\frac{1}{\frac{a}{p}\dotplus\frac{b}{p}}$$

egész volna: mi (a divisio-tanból) lehetlen. Tehát $c=1$*, és így, mivel vala* $cp=$ $=a^2+b^2$*, lesz* $p=a^2+b^2$*. És így reped, hasad, nyilik a p és születik iker* $\square$*-szám p maga is éppen azzá átalakulván.*

És hiszem, sőt fogadni mernék, hogy Euler is így hozta ki, azonban az imaginárius prímtan rigorosa tiszta fogalma és szigorú dem ja tudása nélkül; s azért csodálom is, hogy ismerhette egy Gauss; Disq.Ar. pag.218 föül, dem nak el. Hihetőleg ő sem lévén, kivált akkor, az imaginárokra nézve, tisztában, csak ábrándozva vette magának azon merészséget, az imagin, -okra ott is, mint egyebütt szokták, kiterjeszteni a reálokról igazakát.

Ha pedig még <u>másképp</u> is volna $p = x^2 + y^2 = (x \oplus y)(x \ominus y) = (a \oplus b)(a \ominus b)$ *úgy a prímtanból (<u>itt</u> az x <u>nem</u> a fölöbbi értelemben használódván),* $x \oplus y = (u \oplus v)(t \oplus z)$, *úgy hogy*

$$\frac{a \oplus b}{u \oplus v}, \ \frac{a \ominus b}{t \oplus z}$$

egészek legyenek. De akkor nyilván $x \ominus y = (u \ominus v)(t \ominus z)$, *tehát*

$$p = (x \oplus y)(x \ominus y) = (u \oplus v)(t \oplus z)(u \ominus v)(t \ominus z) = (u^2 + v^2)(t^2 + z^2).$$

De p prím lévén, $u \oplus v$ *nem lehet tiszta: tehát* $u^2 + v^2 > 1$ *s ~-lag* $t^2 + z^2 > 1$, *és p nem volna prím.*

Ha már $\frac{A \oplus B}{C \oplus D}$ *egész, úgy* $\frac{A \ominus B}{C \ominus D}$, *tehát*

$$\frac{(A \oplus B)}{(C \oplus D)} \cdot \frac{A \ominus B}{C \ominus B} = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}$$

is egész, tehát $A \oplus B$*-nek elegy-osztója* {komplex-osztója} *csak az* $A^2 + B^2$ *reál* $C^2 + D^2$ *idomu osztójának (s ha C, D <u>nem</u>= 0) decompozitiójából eredhet: mi az előbbi szerint prímnek csak egyként eshetvén, világos, hogy az imaginárokat admittálva* {elfogadva} *és bármely számnak <u>csak</u> véges számú mérője* {tényezője} *lehet. Ily dem. nélkül nem lehetne tudni, nem lehetne-e* ∞ *sok elegy-mérője* {komplex tényezője} *egy számnak. És tehát így is bármely számot, a rendre nem tekintve, csak egyként vagyis ugyan-azon prímekre szaggathatni* {felbontani}. *És a leg> köz-osztó (lehet más nevet is adni a >, < nek az elegyeseknél* {komplex számoknál} *per se nem lévén értelme) bármely, tehát <u>elegy</u>-számnak is megtaláltatik prímekre szaggatása által. Az előbbit így is lehet dem. -hatni:*

Mivel $\frac{a \oplus b}{c \oplus d} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \oplus \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$; *tehát itt* $\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$, *tehát* $\square$ *jaik öszvegje is mely* $= \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$ *egész.*

{Két sor közé igen apró betűkkel: *Így is: mivel …* $p = (a \oplus b)(c \oplus d) = (a \ominus b)(c \ominus d)$, *tehát* $p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$; *és* $a^2 + b^2, c^2 + d^2 > 1$ *és* p^2 *csak* $= pp$, *úgy, hogy* > 1 *legyen szükségképp* $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.}.

<u>Dem.2.</u> Mivel

$$\frac{p}{a \oplus b}$$

egész: nyílván $\frac{p}{a \ominus b}$ *is az. Már az* $a \oplus b$, $a \ominus b$ *leg > köz-osztója (a fölöbbi értelemben) nem lehet elegyes* $= x \oplus y$, *mivel különbön hason joggal* $= x \ominus y$ *is volna;*

de mivel p prím, más tiszta osztójuk sem lehet $\sqrt[4]{1}$*-en kivül: tehát* $a \dotplus b$, $a \dot{-} b$ *prímek egymáshoz; és így a prím-tanból, egymértjük* {szorzatuk}, *azaz* a^2+b^2 *is osztja p-t: tehát mivel* $a^2+b^2>1$ *és p prím,* $p=a^2+b^2$.

Dem.3. {Először több sor áthúzva} *S így még több variációja is van e dem. -nak. De menyek lényegesen különbözők?*

Dem.3. Van oly x (Disq.Ar. §2, 4, 9, 108) nem $> \frac{1}{2}p$, *hogy* $\frac{x^2+1}{p}$ *egész legyen: hol tehát q nem* $> \frac{\frac{p^2}{4}+1}{p} = \frac{p}{4}+\frac{1}{p}$, *mely, ha* $p=4m+1$, *még azon esetben is, ha p leg* $<$, *azaz* $=1$ *(pro* $m=0$*), nem* $> m+1$, *azon túl pedig minden máskor (ha t.i.* $p>1$*) nem* $>m$. *Már, mivel* $x^2+1=(x \dotplus 1)(x \dot{-} 1)$ *és két factor egyikét is* $4n+$ $+3$ *idomú* {alakú} *prím-szám (melyet nagyon könnyű dem-ni, hogy két* □*-szám öszvegje soha nem lehet, és tehát imag. osztója sincs) nem osztja: a prím-tan szerint ily prím az* (x^2+1)*-t sem oszthatja: tehát q is* $4n+1$ *idomú. Ezt* $\dotplus$ *nélkül is megmutattam s ide való. Ha már megmutathatjuk, hogy ha áll a theoréma bármely, a p-nél* $<4n+1$ *idomú prímről: úgy p-ről is áll: úgy mivel* $5^2=1^2+2^2$*-ről igaz, bizonyosan in* ∞ *igaz. Márpedig, mihelyt p nem* <5*: az előbbi szerint q nem* $> m = \frac{p-1}{4}$ *és* $4m+1$ *idomú prímek egymértje melyek mindenike feltétel szerint 2* □ *vagyis 2 elegy-factor egymértje, tehát nyilván q is, és ha* $q=r^2+s^2$, *úgy lesz* $p=\frac{x^2+1}{r^2+s^2}$. *Már pedig, általjában,* $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{a \dotplus b)(a \dot{-} b)}{(c \dotplus d)(c \dot{-} d)} = \frac{a \dotplus b}{c \dotplus d} \cdot \frac{a \dot{-} b}{c \dot{-} b} =$ $= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \dotplus \frac{bc+ad}{c^2+d^2}\right) \cdot (\ldots \dot{-} \ldots) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2$ *(mit aposteriori, imaginárok nélkül is könnyű a reductis által megmutatni, lévén az utóbbi két* □ $=$ $= \frac{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}{c^2+d^2} = \ldots = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$*): tehát* $p=$ *két* ∩□ {racionális négyzet} *összegéhez, és így a tegnapi theoréma erejénél fogva, mely itt nagyon fölséges, derék szolgálatot tesz, van két oly* □ *szám is, melyek öszvegje* $=p$. *Csakugyan fölséges, remek, főfontosságú és hasznú egy pár theoréma bár-is a nélkül per se lehet zsíros vagy háj-falatot enni.*

De van még egy 4-dik dem., a számtanra mindenütt átható vagy generális vagy mindenható kulcsom által: mely azonban többől áll, minthogy itt most egy levélben megírhatnám.

Ez a nagy fóliáns ívekre (800/1, 1^v, 2, 1333/1^v, 1) írt hosszú levél Fermat karácsonyi tételének (4.5.§) három bizonyítását tartalmazza. A sorok között elrejtve

a Dem 2. előtt egy nyilvánvalóan utólagos bejegyzés kibetűzése után még felfedezhetünk egy rövid, negyedik bizonyítást is. BOLYAI bizonyításaiban a komplex egészekre vonatkozó saját elméletét, a prímtant alkalmazza. Ezt mindegyikben világosan kijelenti. Ezért meggondolkoztató lehet a levél harmadik bekezdésének egyik zárójelébe tett megjegyzése a *készülő* prímtanról. BOLYAI elméletét már rég kidolgozta (5.3.§), csak eredményeit nem foglalta egységes rendszerbe. Itt bizonyára arra utal, hogy ezt is tervbe vette, s amint levelének folytatásából kiderül szándékában állt a Disquisitiones „*bármely theorémáját*" a komplex egészekre is általánosítani.

BOLYAI JÁNOS ebben a levélben válaszol édesapja felszólítására (7.9.§). Ezért keletkezését 1854. április 15. utánra, s figyelembe véve a (7.17.§) utolsó sorát, 1855 májusának vége elé tehetjük, akár az egy nappal korábban írt előző, 7.11. levélét.

7.13. Bolyai János levele apjához

Hogy bármely, $4m+1$ idomu prím-szám p két $\square$-szám öszvegje; és csak egyként. {Bármely pozitív $4m+1$ alakú prímszám egyértelműen felírható két egész szám négyzetének összegeként.}

<u>Dem.1!</u> Isméskép {ismeretes} *van oly x reális* {egész} *szám: hogy $\dfrac{x^2+1}{p}$ egész legyen. De $x^2+1=(x\oplus 1)(x\odot 1)$: tehát, az imagináriusokra is (per se szigorú dem-ok mellett) kiterjesztett prímtanból, lennie kell oly móddal $p=ef$-nek, hogy $\dfrac{x\oplus 1}{e}$, $\dfrac{x\odot 1}{f}$ egészek legyenek: Sem e, sem f <u>tiszta</u> nem lehet, mert ha egyik tiszta: úgy a másik is nyílván az; de akkor a fölsőkbeni $1-t$ mindeniknek osztania kellvén, nyilván mindenik csak $\subset \sqrt[4]{1}\{\pm 1, \pm i\}$ lehetne: míly két szám egymértje* {szorzata} *pedig soha sem lehet $=p$. Tehát e is, f is elegy. Legyen az a, b, c, d reális számokat jelentvén, $e=a\oplus b$, $f=c\oplus d$: tehát*

$$\frac{p}{a\oplus b}=\frac{ap}{a^2+b^2}\odot\frac{bp}{a^2+b^2}$$

egész, de a is, b is, $<a^2+b^2$: tehát ez, amazok egyikét is, mivel egyik sem lehet $=0$, nem oszthatja; lennie kell tehát az a^2+b^2-nak valamely az 1-nél $>$ mérőjének {tényezőjének}, *mely a p-t ossza, vagyis p-nek az a^2+b^2-tal valamely 1-nél $>$ köz-osztójának. De p prím lévén, más számmal, saját többösin (multipla) kívül, ily osztóval nem bír. Vagy, rövidebben: az említett mérője az a^2+b^2-nek p-t osztván, az, mivel p prím, szükségképp $=p$ magához. Osztja tehát p az a^2+b^2-t, és ha $a^2+b^2=cp$: úgy*

$$\frac{ap}{a^2+b^2},\quad \frac{bp}{a^2+b^2}$$

egész lévén, nyilván $\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{b}{c}$ is egészek, azaz c köz-osztója a, b-nek. De c nem lehet >1 mivel, különbön

$$\frac{p}{a\oplus b}=\frac{p}{c\left(\frac{a}{c}\oplus\frac{b}{c}\right)}$$

egész lévén, $\dfrac{p}{c}$ is az, tehát p prím lévén, $c=p$, s tehát

$$\frac{1}{\frac{a}{p}\oplus\frac{b}{p}}=\frac{\frac{a}{p}}{\left(\frac{a}{p}\right)^2+\left(\frac{b}{p}\right)^2}\odot\frac{\frac{b}{p}}{\left(\frac{a}{p}\right)^2+\left(\frac{b}{p}\right)^2}$$

is egész volna: mi pedig, mindenik fölső az alsónak < lévén, lehetlen. Tehát $c=1$, *és így, mivel vala* $cp=a^2+b^2$, *lesz* $p=a^2+b^2$.

És így reped(ez), hasad, nyílik a p, *és születik gyönyörű iker □-szám, az anya* p *maga is éppen azzá változván.*

Ha pedig még másképp is volna $p=z^2+y^2=(z\dotplus y)(z\mathbin{\dot{-}}y)=(a\dotplus b)(a\mathbin{\dot{-}}b)$; *úgy, az említett prím-tanból* $z\dotplus y=(u\dotplus v)(t\dotplus q)$, *úgy, hogy*

$$\frac{a\dotplus b}{u\dotplus v},\quad \frac{a\dotplus b}{t\dotplus q}$$

egészek legyenek. De akkor nyílván $z\mathbin{\dot{-}}y=(u\mathbin{\dot{-}}v)(t\mathbin{\dot{-}}q)$ *tehát* $p=(z\dotplus y)(z\mathbin{\dot{-}}y)=$ $=(u^2+v^2)(t^2+q^2)$ *és így,* p *prím lévén vagy* u^2+v^2, *vagy* $t^2+q^2=1$, *tehát, az első esetben vagy* u, *vagy* $v=0$ *s a másik* $=\pm 1$, *hasonlólag a 2-dik esetben vagy* t, *vagy* $q=0$; *tehát*

$$\frac{a\dotplus b}{(u\dotplus v)(t\dotplus q)}=\frac{a\dotplus b}{z\dotplus y}$$

minden esetben egész, és ha ez $=r\dotplus s$, *úgy* $\dfrac{a\mathbin{\dot{-}}b}{z\mathbin{\dot{-}}y}$ *nyilván* $=r\mathbin{\dot{-}}s$, *tehát nyilván* $r^2+s^2=1$, *s így egyik* r, s *közül* $=0$, *a másik* ± 1. *Miből világos, hogy* $z\dotplus y=$ $=(a\dotplus b)\sqrt[4]{1}$, *s tehát ugyanazon iker □-tot szüli.*

Ha már $\dfrac{g\dotplus h}{k\dotplus l}$ *egész: úgy* $\dfrac{g\mathbin{\dot{-}}h}{k\mathbin{\dot{-}}h}$, *tehát* $\dfrac{g^2+h^2}{k^2+l^2}$ *is egész: tehát* $g\dotplus h$*-nak elegy osztója nyilván csak a* g^2+h^2 *real* k^2+l^2 *idomú osztójának (hol* k, l *egyik sem* $=$ 0*) decompozitiojából eredhet, minek módjai számát is meghatározhatni a* k^2+l^2*-nak* $4m+1$, $4m+3$ *idomú mérői számából (külön-külön); és így az imaginárokat bebocsátva (admittálva) is*

A többi más papiron van.

Fermat karácsonyi tételének szépen letisztázott bizonyítása. A kéziratos hagyaték talán legszebb oldalai (1332/1, 1^v, 2) (lásd 7. ábra, 90. old.).

Valószínűleg 1855-ben íródott. Ebben az időben foglalkozott BOLYAI Fermat tételével. Az előző levelek több mondatát felismerjük ebben az írásban is.

Biztosan volt folytatása is. Erre utal a ceruzával írt utolsó mondat: „*A többi más papiron van*".

7.14. Bolyai János levele apjához

Január 20-án 1855-ben. Kétszer egy napon sem feredém, de mosodám többször is: mire D. is rátért. Ezek többnyire odivsumok valának: már menyek legalább részint, kellemesb tárgyakra.

A küldött pennákat ugyan köszönöm; az ilyekkel tán megélhetni.

Gerling nem kétlém, hogy divat szerinti tudós ember, s tán némi Sinn-nel {érzékkel} *is bír a mi szellemünk szerinti dolgokhoz (minek azonban levelében csaknem semmi jelét sem láthatom): minden esetre becsülöm a jóra már csak a képesség szerinti becsületes törekvést is, s örvendem ha munkánkból bár egy szikra pattant lelkében s általjában mint becsületes embert érdeme szerint becsülöm. Ettingshausent is becsülöm mint sok-érdemű és distingvált embert, bár is minket tán nem méltányolni elég boldogtalan vak elfogult.*

Szász Károly miért ellenezte a német kiadását? Tán a Lobatsewski és Appendix közötti párvonalért? De fölhíva érzem magamat azon állítmányjára: „azt ketten csináltuk volt már régen ki" halála után is ismégelni azt, mit életében is régen kimondottam: hogy az egy szemtelen gyalázatos hazugság: mert én tőle semmit sem tanultam; igaz ugyan, hogy beszéltünk (tulajdonkép én mondván azt is legellőbb) hogy ha a XI. Axióma nem igaz: úgy a körhatár, vagy ha tetzik circulus rad. ∞ egy görbe unif. vonal in plano, vagyis, hogy ha annak egyenességét meg lehetne mutatni, úgy a XI-Axioma meg volna mutatva. De mindezt sem vitattuk tovább vagy vettük apróra s bizonyítottuk meg együtt s ennél tovább, többre nem is mentünk, mi onnan is kiviláglik, hogy én aztán magamra mindent kidolgozva, az ő (mint akkor mindjárt írtam) Tompa Professorral s egy Enyedi Deákkal Aradon nálam jártakor én mint merőben új dolgokat nagy zelus enthusiasmussal {lelkesedéssel}, *hasonló fogadtatást várva közöltem vele az eredményeket miknek is azonban ő becsüköt és hatásukat teljességgel nem volt még csak képes is átlátni, mind csak azt erősítvén: hisz a nem formula! bíz a nem formula, nyilvános jeléül annak, hogy mind azt nem együtt csináltuk.*

Továbbá az Appendix kijötte után Enyeden átjöttemkor a Váradi Dr. és Vajda jelenlétében (ki tehát ma is első tanú lehet) kérdeztem Szásztól szó kerülve az Appendixre, hogy hát olvasta-e? Felelé: El. Kérdem: „egészen?" Felelé: egészen. De hogy legkisebb része lett volna benne arról altissimum silentium {legmélyebb hallgatás} *volt. Pedig ott jó rés* {alkalom} *lett volna most alacsonul hát-megett ellopott részéhezi jogát megemlítni. És ha ittléte alatt magát hozzám lealázta volna, mindenkor kész voltam teljes fölvilágosítást és kielégítést adni, s úgy tudom ez az igazság útja nyiltan értekezni és mindkét felet kihallgatni, nem pedig (hallatlanul) hát megett bitorolni szerzőji czímet, mintha azért, hogy fölteszem G.vel*

{Gaussal} *egyszer, kétszer vagy bárhányszor is beszéltem, azt állítni, hogy ketten írtuk a Disq.Ar-t. S G.-nél is hiában locsogott olyasmit, mert okos ember az afélét nem hiszi, sőt megitéli az oly kérkedő szemtelenségét.*

Gerling ha a fonákoson = lapok által bezárt űrök = ségét bár a 3 oldalú pyramisoknál megbizonyította, becses: első levelemben kétkép {két módon} *is megvan. De mint megírtam, nincs miért többöt rontani vele a szemet, vagy két fő dolog megváltoztatandó is lévén. Ha még megérem, hogy oda mehessek s tetzend meghallgatni elolvashatom.*

A sphaeroidroli kérdést pedig a nekem írt 2 magyarázat után sem értem és, hogy értsem szükséges 1) értelmezni, mi legyen sphaerois? tán ellipsoist ért alatta; 2) az úgy eredő ellipticum Δ-ra nézve miféle excessus értetik; s általjában az egész kérdésnek apróra szigorral tisztáni föltétele s ekkor előre merem igérni a megfejteni képességemet; s gondolhatnék magam is ebbéli kérdéseket, de érdektelen és hasztalannak látom.

A Crelle Journal der Math. und Physikből vagy két Heftet {füzetet} *Zitta akkori Major* {őrnagy}, *most Feldmarschall-Lieutenanttól darab ideig bírhatván sok jót találtam benne, bár volna még itt olyasmi, Grunert ..., de e Kräh – Winkel város* {kis város} *és országban elég egy pár ájtatos imádságos könyv.*

Reménylem csak némi egészségre tehessek szert, nyitok én kaput magamnak egyéb > és lényegesbekkel; szégyelném is avval most előbb föllépni.

N.B. La Grange-nak Crelle által sok jegyzetekkel kiadott Theor. des fonct.-ját is nézegettem.

Már

A Pyramis telyéről

Mint sok egyebet azon levélben, úgy ezt is ugyan már rég láttam volt az itt mindjárt megírandó módon: de mind véges darabi = ségre nézve akarván tisztába jönni, mint erre nézve semmit számba sem vettem. Azon levelem írásakor azonban figyelmem egészen egyébbel (a véges =séggel) levén elfoglalva, igaz, hogy jól ugyan, de H. F.-ként ok nélkül kerülőleg hoztam ki a pyramis telyét {köbtartalmát}.

Hogy pedig a dolog erét éppen nálomnál senki inkább nem keresi s el sem igen találja a Földön, és hogy a levelem megírása után magam rögtön észrevevém a rövidebb útat és azt csak azért hagytam el, hogy részint untam már még többöt írni, részint nem akartam levelemet még rendetlenebbé tenni: kiviláglik jelen esetben azon otti hozzátételből, hogy arra még ∞ sok út van.

Azon levelem írásakor főleg a véges darabi =séggel bajlódván csak történetesen mentem útközben az otti demonstraciora a fonákos pyramisok által, mert

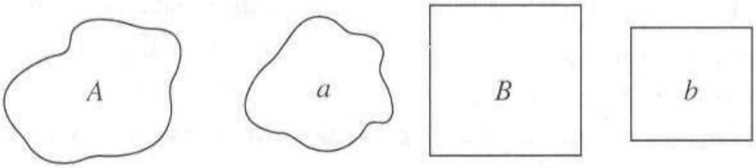
mint azon levelem átfutásakor rögtön magam is észrevettem, per se hogy az fölösleges és még sokkal rövidebben, egyszerüöbbön lehet, a nekem megírott módon a legegyszerübbön s csinosban pedig a következőleg.

Euklid XII. 3-szerint, ha az egész pyramis = A a tetőnéli vagy leszelt mindenik = a s mindenik prisma = P: úgy $A = 2a + 2P$. *Már pedig (a mindjárti §szerint* $A = 8a$*: tehát* $6a = 2P$; $a = \frac{1}{3}P$.

Kívánat szerint németül írom.

Lehrsatz. Ähnliche Körper verhalten sich, wie die Würfel ihrer gleichstelligen oder = namigen (homologen) Linien.

Beweis. Läszt sich der Körper A vom Würfel B, wenn auch nur stückweise, höchtens m Mal wegnehmen: so ist es klar, dasz (wenn die Seiten der Würfel B, b sich verhalten, wie die homologen Linien der ~chen Körper A, a) auch a, auf ~che Art zerstückelt, sich von b m Mal, und nicht öfter, wegnehmen lasse, und das überhaupt nach Art der Suchung des gröszten gemeinen Theilers A ebenso durch B, wie a durch b gemessen werde, oder $A : B = a : b$, *folglich auch* $A : a = B : b$ *sei. Etz.*



Ennek hosszabb dem.-ja, mint egyszerű, egyenes, helyes és jó az eszméje, bár is ez még leg < dolgaim közöli. Csakugyan még van becse (bár is mind a véges-ség lévén szemem előtt, ezt előbb kicsibe vettem, alig ügyölve rá) és Euklid óta új; és elég csodálatos, hogy ezen Földi Világ Tanítója óta egy követője is (melyeknek száma nem csak 1, 2; midőn Euklid még China s Japánban is aligha nem otthonos) ezt észre nem vette s az Euklid módja után csak a be- s kivül- irott prismák által, a görbék módjára így hozták ki a pyramis telyét a Tentamen új, elmés és szép módjáig. De megírtam volt, hogy egy-pári {mértani} *sorra is rég vittem a legrövidebben ugyan az Euklid előbbi prop.-ja szerint.*

Most pedig megírom a dolog általános erét és a ∞ *sok utat (minek előbbi levelembeni említéséből eléggé látszik, hogy már akkor is tudtam a legrövidebb módot). A pyramis basissával bárhány és bármely távokban egymástól vonván párhuzamos lapokat, s a legfölső pyramison aluli stratumokból Euklidileg egy-egy pyramist elvágva a maradvány mindenütt ugyan Euklidileg 2, ha nem is = prismára darabolható, miután az előbbi német §erejénél fogva könnyű a kis pyra-*

misokat a naggyal kitenni, a nagy pyramisok és prismák között egyenletet találni és ebből a pyramis telyét kiszámítani.

Más mód (de hosszabb). Ha az előbbi stratumok magjai a Tentamen szerint egyközüleg kettélődnek, úgy a Tent-beli módon is lehet a corpus 5. laterum által pyramist és prismákat csinálni és célt érni, de megjegyzendő, hogy a fonákos corpus 5 laterumok = sége úgy is föltétetik.

A német §-ról előbbi levelemben is érintettem volt annyit, mennyit figyeltetésre elégnek gondoltam. Az itti kifejtés reménylem elég lesz, bár is itt kireszelés, simítás, fényesítés, csinosítás, sőt még bárdolásról is szó sincs és mostani állapotomban nem is lehet.

Az ∞ *természet szerint benne röjlik, mihelyt a pyramis a kockával* $\cup$ {irracionális}; *ha pedig* $\cap$ {racionális} *vagy commensurabilis: úgy nem is jő egyébként* ∞ *be, csak a netáni végetlenségébe a* $\neq$ *nek. Tehát csakugyan (bár is mind a többi, per se a Tentamenbelivel együtt megtartást érdemlők) van ennek egyszerűség, rövidség, csínra nézve saját becse és előnyje.*

A német §-t pedig semmi kételyem nincs, hogy $\sim$ *lag ne vegye át, nem is lehet más eszme szerint. Gerlinget, ki a Le Gendreével megelégszik, ez is kétely nélkül kielégíti merőben ő nem keresvén* $\neq$*-t.*

A levelet (742/1, 2, 2^v, 3, 3^v, 4, 4^v) 1855. január 20-án írta BOLYAI JÁNOS. Első része (a másodiktól a hatodik bekezdésig és a hetedik bekezdés mondatának fele) már ismert [17, 408–409 old.], sőt STÄCKEL is idéz belőle [106, 1:78 és 216]. Most azért közöljük teljes terjedelmében, mert a nem szakember közreadó éppen a sok matematikai szöveget tartalmazó második részt nem publikálta. A levél különben úgy kezdődik, ahogy most olvasható és nem csonka. A [17, 408 old.] oldalon lévő első bekezdés nem tartozik a levélhez, az a $742/1^v$ kéziratlap egy önkényesen kiragadott része.

A BOLYAI által németül írt tétel magyar fordítása a következőképpen hangzik:

Tétel. Hasonló testek úgy aránylanak egymáshoz, mint a kockák ugyanolyan helyzetű vagy egynevű (homológ) vonalai.

Bizonyítás. Távolítsuk el az A testet a B kockából, ha darabonként is, legfennebb m-szer: így világos, hogy (mikor a B és b kockák oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint az A és a hasonló testek homológ vonalai) a is előállítható b-ből hasonló módon m-szeri és nem többszöri eltávolítással és ez voltaképpen A-nak B-általi legnagyobb közös osztójának megkeresése szerint (történik), miképp a a b által méretik, vagy $A:B=a:b$, és következésképpen $A:a=B:b$ lenne. Stb.

7.15. Bolyai Farkas levele fiához, Jánoshoz

A templomban hosszú prédikatcio alatt hajadonfőn Grippet kaptam. A pincébe hírtelen görcs miatt a gyertyát kiejtve falhoz támaszkodtam, míg elmult – csengetés a kortina {színpadi függöny} lebocsátás előtt.

Ha a tenta megért, adj a küldött kis üvegbe, próbára. A gallest {gubacsot} kevesellem a vas gáliczhoz, a vas igen mezítlen a léghez oxidálódnék s az írás sárgulna, ha a gumi nem óvná. A Funke tentája 8 lót fáin galles, s 2 lót gálicz (oda teszi: gar kein Gummi) de serrel 2 kupát ad; igen jó csak a serünk miatt fényes.

A Vajdáé éppen az amit írtál, hanem ecet is jó hozzá s más manipulácio {eljárás}.

A hegedülésre ocular kell, más mint az olvasásra; talán hoz Trátyi most.

Láttad-e valahol: hogy ha p prímszám, s a-nak p nem factora: úgy $a^{\frac{p-1}{2}}$ az $mp \pm 1$ kép alá jön (m számot téve) $\{a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 (\bmod p)\}$. Csak annyit izenj, hogy láttad-e, vagy nem? de ne hagyd semmi dolgod félbe.

A levél (1358/1) keltezése: 1855. május 2, s teljes terjedelmében megtalálható a [17, 413 old.]-on. Mégis újra közreadjuk, mert amint már megjegyeztük, az első közlésben előforduló hibák miatt a matematikai szövegrész érthetetlen volt. Ez egy fontos levél. Farkasnak a benne felmerülő kérdésére írja meg neki János, hogy a kis Fermat-tétel fordítottja általában nem érvényes (4.3.§).

A levél hátlapján ($1358/1^v$) BOLYAI JÁNOS következő rövid jegyzetét olvashatjuk: *Ha* $p = 2m+1$ *prímszám, úgy a Fermat-theoréma szerint (egyszerübbön mint Gauss 106.§-ban), ha a nem többöse p, de p prím* $a^{2m} \equiv 1 (\bmod p = 2m+1)$, *vagyis*

$$\frac{a^{2m}-1}{p} = \frac{(a^m+1)(a^m-1)}{p}$$

tehát vagy $\frac{a^m+1}{p}$, *vagy* $\frac{a^m-1}{p}$ *is szám* {egész}, *azaz* $a^m \equiv 1$ *vagy* $-1 (\bmod p)$.

Továbbá, bár-is Gauss a 106.§-a egyszerű és széptant gyakorlatra többnyire merőben hasztalannak állítja hibázik, nem úgy van: mert éppen nagyon kényelmes {itt megszakad}.

BOLYAInak ezt a gondolatát még máshol is (193/3) megtaláljuk.

7.16. Bolyai János levele apjához

A tegnapelőtt igért $2^{\frac{p-1}{2}}$ *-re nézve ugyan ezelőtti vizsgáimat hirtelen nem kaphatván elé, vagyis inkább akarván újból gondolkozni rajta, még tegnap tisztába jöttem: mire nézve, itt rövidségért bővebb tárgyalást mellőzve, a fő-dolog iránti kétely és nyughatlanság teljes eloszlatására elég már a következőket is közölni: bizonyos az, hogy ha m nem prím: úgy*

1) nem bármely az m-hez prím a oly, hogy $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv$ *vagy 1, vagy* -1 *legyen* $(\bmod m)$*;*

2) hogy csakugyan mindig van oly a ...

3) hogy az oly a az m-hez csak prím lehet; mi pedig a legközelebbi és tulajdonképi főkérdés:

4) hogy éppen

$$2^{\frac{m-1}{2}} \text{ is lehet} \equiv 1 \,(\bmod m),$$

bár-is m nem prím: minek megmutatására per se elég egyetlen példa is, mint a következő: melyre ugyan csak történetesen de még sem vaktában, hanem elmélet után mentem.

$2^{340}-1$ *oszlik* $(341=11.31)$*-gyel, mint* ∞ *könnyön meggyőződhetni abból, hogy* $2^{10}=1024$*: melyet osztva 341-gyel marad 1; tehát (Disq. Ar.§7)* $(2^{10})^{17}=2^{170}=2^{\frac{341-1}{2}}$ *-nek maradványa is, valamint* 2^{341-1}*-nek is* $=1$*; úgy, hogy tehát sem a Fermat theoréma sem a*

$$2^{\frac{m-1}{2}} - re$$

nézti szép sejtelem (mely ha a dolog természete szerint valósulhatott volna, egy excelleng és nagyon kényelmes új isme-jele (criterium) lesz a prímeknek), nem csak, hogy generaliter nem, hanem még azon különös esetben sem állnak, ha $a=2$.

La Crois-t küldöm, a polinomiumról van lap. 43.-tól 51-ig bazárólag nagyon hosszason. De meg van a kitétel módja a Disq. Ar.-ban is lap 47 a fölső öt rendben: minek okadatja {bizonyítása} *nem bajos. Az ízek* {tagok} *számára nézt rágondolva az első percben láttam, hogy az a, b, c ... száma* $=n$*; úgy a potentiájéi* $=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)\ldots$

A La Crois Traité du Calcul ... intégralt, ha most nem szükséges szeretném megnézegetni, mert sohasem láttam.

Ezt a levelet (1018/1, 1^v) 1855 májusában írta BOLYAI JÁNOS, és részletesen elemeztük a (4.3.§)-ban (5. ábra, 80. old.).

7.17. Bolyai Farkas levele fiához, Jánoshoz

Azóta mind olyan rosszúl és fonákul vagyok, hogy írásodat nem itélhetvén meg kérésedre visszaküldöm.

A $2^{\frac{p-1}{2}}$ nek conversája jónak látszó demonstrációját se merem állítani, úgy elvesztettem magamra nézve is hitelemet – amidőn egy más igen szép gondolatomat is félszegnek találtam – A Gauss számját se tudom, Euler sok próba nélkül miként találta ki – Gauss meg tudná mondani, mert ő is találta, mutatja az a szava primus invent {első feltaláló}.

Fermat consiliarius szorgalmas a hivatalában s egyenes pontos bíró s ilyen című munkája is van Fermat poemata.

Néhány éjszaka az ajtó elébe jött kutyák lármája miatt nem alhattam s nappal ugatások s ordításuk miatt nem dolgozhattam. Nappal szemem láttára ... az ösvényen végig elé jött. A füvet több helyt aratják. Basarózsáimat déltől estig leszaggatták.

Beteg vagyok s Gergelynek újabb vására Sajóval {?} is levert. Neki vége absolute meg nem él, koldusbotra jut.

....

A $4n+1$ csak a Petersburgi Actákban van (Gausson kívül), hogy láttam Euler könnyű szemű: de rigorra {szigorra} újra kell osztani. Péld. hogy két egész szám quadrátumainak summája csak két quadrátumok summájával oszlik, belőle vett ideából csináltam ki.

A $4n+1$ van a Comment. novi Petropolitan Toma V. dátum 1754 s 1755.

A levélen ($1521/1^v$, 1) ez áll (igaz, hogy áthúzva): Pünkösd másodnapján 1855, vagyis Farkas 1855. május 28-án írta, vagy később.

Szövegéből arra következtethetünk, hogy ez BOLYAI JÁNOS 7.16. levelére írt válasz.

E levélnek és a 7.15. segítségével vált bizonyossá, hogy János a 7.16. levelét 1855 májusában írta.

A levél első és utolsó sorai fontosak. Ezért közepéből néhány sort kihagytunk. Az utolsó előtti bekezdés alapján ismét kiigazíthatjuk STÄCKEL néhány téves mondatát [106, 1:96]. Az utolsó mondatban arra figyelmezteteti fiát, hogy Fermat karácsonyi tételének bizonyítását a teleki Tékában lévő Petersburgi Actaban találhatja meg. Erre azért volt szükség, mert János azt hitte, hogy EULER

is úgy bizonyított mint ő. „... *fogadni merném, hogy Euler is így hozta ki ...*" írta János (7.12.§).

E rövid levél második mondatának egy részét „... úgy elvesztettem magamra nézve ..." BEDŐHÁZI nyomán ALEXITS GYÖRGY is idézi [1, 88 old.], de hibásan. Szerinte a mondat utolsó szavai: „... igen szép gondolatomat is félszegnek találtad." A „találtam" szónak a „találtad"-dal való felcserélése ebben az esetben a mondat értelmét teljesen megváltoztatja, s így a belőle leszűrhető következtetéseket is. Sajnos ALEXITS ezt a félreértett félmondatot elemezve, János apjával szemben tanusított tapintatlanságára, fölényeskedésére tesz elmarasztaló megjegyzéseket, ezzel tovább rombolva a már eléggé megtépázott apa-fiú viszonyról kialakult képet.

7.18. Bolyai János levele apjához

Az abbéli nyughatatlanság elenyésztésére kívánom ezennel a még akkor este (néhány perc alatt) kigondolt egy pár (csakugyan nagyon rokon és nem annyira a lényegben, mint az idomban különböző) reménylem nem inelegánsnak találandó s megkedvelendő okadatot {bizonyítást}, *némi előizletűl s az ennél (bár-is ez is nagyon fontos és szép) teljes bizonnyal birtokomban lévő sok hasonlíthatatlanul > bakra nézt több hitel-nyerésre, közölni, még pedig mit teljesíthetni első tekintettre nem hívék a* $4m+1$ *nélkül, csupán a prímek általam régóta az imagináriusokra is kiterjesztett elemi tulajdonából. A* φ^2 *pedig procerto* {bizonyosan} *hibás, és azon úton kár volna.*

Jelentsen itt a theorémában kijelölt kivéttel, bármely, algebrailag használt betű 0-től különböző számot.

Theorema. Ha {A sor fölé ceruzával: *á Vez-tanban*} *a nem összvegje két □ számnak* {egész szám négyzetének}, *vagyis mi evvel egyhatású vagy egyettevő a-nak nincs elegy osztója; azonban* $a=\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{d}{c}\right)^2=\frac{b^2+d^2}{c^2}$*: úgy a □-szám* {teljes négyzet}.

Vagyis ha $a=\frac{b^2+d^2}{c^2}$*: úgy a vagy □-szám vagy két □-szám öszvegje.*

Vagy pedig így (a következő két idomjában a theorémának a 0-t is befoglalva a pozitív számok közé): Ha a nem öszvegje két □ számnak: úgy két ∩□ nak {racionális szám négyzetének} *sem lehet öszvegje.*

Még másképp: Ha a öszvegje két ∩□ nak: úgy öszvegje két □ számnak is.

{Két sor közé beiktatva}:

Az imagináriusokra is ki kell lehetőleg terjeszteni, az

$$f^2+g^2=\left[\frac{2fpq+g(p^2-q^2)}{p^2+q^2}\right]^2+\left[\frac{2gpq+f(q^2-p^2)}{p^2+q^2}\right]^2 \text{ – ban}$$

{Folytatás a felső sorközökben apró betűkkel}: *az* f, g, p, q *helyett előbb* $F+\varphi$, *. . . téve s az al-ut részt* {képzetes részt} *0-itve ha lehet, de 2, 4 rangúakra vezet s aztán fő-utakról már meg van mutatva. E felől is dönteni nagyszerű új dolog. Azonban á sejtelem (hozzátevés) nem áll, mert már* $f^2-g^2=f^2+(ig)^2=(f+g)(f-g)=$ *bármely 4m, vagy páratlan számhoz: de nem bármely efféle számok 2□ öszvegje. ∼ lag azon tan hogy 2 □ szám összege csak megint* {olvashatatlan}

csak □ okról áll: midőn már $f^2-g^2=(f+g)(f-g)$ *nyikra oszolhatik* $4m+3$ *idomú prímmel is. És éppen úgy szép és a baj …*

Dem.1. Ha $a=er^2$ *és* $r>1$, *vagyis a az 1-nél > □ számmal oszlik: úgy,* $\frac{a}{r^2}=$ $=\frac{b^2+d^2}{c^2\cdot r^2}=\left(\frac{b}{cr}\right)^2+\left(\frac{d}{cr}\right)^2$ *egész;* $\frac{a}{r^2}$ *pedig nem* $=s^2+t^2$, *azaz két □ szám összvegéhez: mivel különben* $a=r^2(s^2+t^2)=(rs)^2+(rt)^2$; *tehát, a föltét ellen a = volna két □ szám összvegéhez: mivel különben* $a=r^2(s^2+t^2)=(rs)^2+(rt)^2$; *tehát a föltét ellen a = volna két □ szám összvegéhez. Másfelől, ha* $e=\frac{a}{r^2}$*-ről megbizonyosul, hogy □ szám* $=l^2$: *úgy a nyilván* $=(lr)^2$, *tehát a theoréma meg lesz bizonyítva. Mi által oda van a dolog vive, vagy redukálva, hogy elég vagy szabad a-t minden 1-nél nagyobb □ szám osztótól mentnek föltenni: mit ezennel meg is teszek. A föltételből* $c^2=\frac{b^2+d^2}{a}=\frac{(b\dotplus d)(b\dotminus d)}{a}$ *(Ezen „∔", „∸" jegyekkel már szinte egy fertály* {negyed} *évszázad (1831 első fele) óta nagy kényelem- és gyönyörrel élek és oly szép- vagy csinosak általában célszerű- és tökélyeseknek találom és nagyon remélem és erősen hiszem, hogy meglátva az egész math. Világ azonnal megkedvelve mohón elfogadja, hogy még a jövő életekben sem hiszem jobbak legyenek)*

Már a prímtanból (minek okát itt rövidségért el kell hagynom) bizonyos az, hogy ha egy szám a két szám factumát {szorzatát} *osztja, úgy a valamiképp oly két factor factuma,* {két tényező szorzata} *(Így is: ha* $\frac{b^2+d^2}{a}=\frac{(b\dotplus d)()}{a}$ *egész: úgy* $a=ef$, *hogy* $\frac{b\dotplus d}{e}$, … *egész legyen. Már e, tehát f is tiszta nem lehet mivel itt b, d-t eredetükből nyilván szabad egymáshoz prímeknek tenni föl tehát e, f leg > köz-osztója ~ ul tehát e is, f is elegy s* $b\dotplus d$ *két elegy factor factuma, s' tehát* b^2+d^2 *csak 2 □ összegével oszolhatik, még pedig 0-t kirekesztve), melyeknek egyike az előbbi két factor egyikét, a másik a másikat osztja, a jelen esetben, hogy van oly e, f hogy* $a=ef$ *és* $\frac{b\dotplus d}{e}$, $\frac{b\dotminus d}{f}$ *egész legyen.*

Mivel a-nak föltétel szerint nincs elegy osztója az e, f tiszták és mivel a □ szám osztóval nem bír, prímek egymáshoz, tehát mivel $\frac{b\dotplus d}{e}$, *tehát* $\frac{b}{e}$, $\frac{d}{e}$, *tehát* $\frac{b\dotminus d}{e}$ *is, mint* $\frac{b\dotminus d}{f}$ *is, egész, a prímtanból* $\frac{b\dotminus d}{ef}=\frac{b\dotminus d}{a}$ *is az és ha* $h=\frac{b}{a}$, $k=$ $=\frac{d}{a}$; *úgy nyilván lesz* $c^2=a(h\dotplus k)(h\dotminus k)=a(h^2+k^2)$, *hol* $h<b$, $k<d$, *azon egy*

esetet, mikor $a=1=1^2$ *kivéve, mikor azonban a theoréma nyilván áll. Itt már könnyű látni, hogy mivel a az 1-nél nagyobb □ számmal nem oszlik,* $\frac{c^2}{a}=h^2+$ $+k^2$*: mi szerint az eredeti egyenlethez ~ lóra* {hasonlóra} *érénk mellyel s minden így kijövővel ~ log. bánva, világos, hogy b, d az a-val* <u>*bárhányszor*</u> *egymás után oszolhatók. És pedig b, d változatlanok lévén nyilván csak úgy lehetvén bizonyos, hogy azon föltétel, miszerint a az 1-nél nagyobb □ -tal nem oszlik és mégis >* >1 *ellenkező vagyis ellenkezést foglal magában. Miből végre foly, hogy ha a az 1-nél > □ számmal nem oszlik (mint föl is tevődött): úgy a csak* $=1$ *lehet. Ha* $a=1=1^2$*, tehát csakugyan □-szám.*

<u>*Dem.2.*</u> *Ha már itt a* <u>*bármely*</u> *pozitív szám,* $a=ef$*, s mint előbb* $\frac{b\dotplus d}{e}$, $\frac{b\dotminus d}{f}$ *egészek; l leg> közosztója e, f-nek;* $e=lm$, $f=ln$*: úgy m, n prímek egymáshoz, tehát mivel* $\frac{b\dotplus d}{l}$ *oszlik m-mel is, n-nel is: a prímtanból oszlik mn-nel is, tehát* $\frac{b\dotplus d}{lmn}$ *egész; és, ha, rövidségért,* $g=mn$, $h=\frac{b}{gl}$, $k=\frac{d}{gl}$*, úgy nyilván lesz* $c^2=\frac{b\dotplus d}{l}\cdot\frac{b\dotminus d}{gl}=g(h\dotplus k)(h\dotminus k)=g(h^2+k^2)$*; hol, mivel* $gl=\frac{a}{l}$, $h=\frac{bl}{a}<b$, $k=\frac{dl}{a}<d$*. És így* $\frac{c^2}{g}$ *egész; és g nyilván* $=ip^2$, $\frac{c^2}{g}=iq^2$*: tehát* $iq^2=h^2+k^2$*. Ha már itt i □-szám, úgy, mivel* $a=gl^2=ip^2l^2$*, nyilván a is az. Ha pedig nem: így az elsőhöz ~* $iq^2=h^2+k^2$ *egyenletet nyerünk: mellyel s mindenik ez úton kijövővel, valamíg á bal-felől első potenciájú mértárs* {tényező} *nem □-szám, ~ log bánva, világos az, hogy a h, k helyett mind < bbülő számok lépnek, másfelől pedig, hogy a′ b, d′ osztóinak száma csak véges lehetvén, e műtétel végnélkül nem mehet, hanem valamikor szükségeskép az említett mértárs is □-szám lesz: mi által a egyszerre mind □-szám osztókra lesz szaggatva, tehát maga is □-számmal tűnik föl.*

N.B. Euler jó helyt tapogatódzott, a tapintata jó helyre vezette, de minden <u>*alap*</u> *nélküli* <u>*legfölületesb*</u> *ebbéli eljárással.*

Egyúttal kivánatra megirom röviden az erét azon theoréma demonstrációjának, miszerint bármely $4m+1$ *idomú prím két □-szám summája és* <u>*csak egyként*</u>*.*

N.B. Ennek is van, mint a Fermat theorémájának is helyes és kimerítő moddali conversája {fordítottja}, *t.i.* <u>*Bármely pozitív páratlan szám, mely csak egyként összvegje két egymáshoz prím □-számnak, prím*</u>*.*

<u>*Dem.1.*</u> *Kétkép is megvan a Disq. Ar.-ban is, mutatva azon egyszerűön vagy nem bajosan igazolható tan vagy állítmány: miszerint* -1 *□-maradványa bármely*

$4m+1$ *idomú p prímnek, azaz: van oly* x^2, *hogy* $\dfrac{x^2-(-1)}{p}=\dfrac{x^2+1}{p}$ *egész legyen.*

De $\dfrac{x^2+1}{p}=\dfrac{(x\dotplus 1)(x\,\dot{-}\,1)}{p}$; *tehát az itt is előrebocsátandó s itt föltett prímtanból, mint az előbbi theoréma demonstrációjában, van úgy* $p=ef$*: hogy* $\dfrac{x\dotplus 1}{e}$, $\dfrac{x\,\dot{-}\,1}{f}$ *egészek legyenek.*

De mivel 1-t (a fölső imag. részben) más *__tiszta__* *szám (+, −,* $\dotplus$, $\dot{-}$*) 1-en kívül nem oszt, világos az, hogy itt már e, f egyik is* *__tiszta__* *nem lehet, tehát* *__elegyes__*. *Ha már* $e=a\dotplus b$, $f=c\dotplus d$ *és az a, b, c, d reális számok* {egész számok} $a\dotplus b$, $(c\dotplus d)$*-nek leg> köz-osztója* {a további szöveg áthúzva}.

N.B. A >, < (itt csak annyit)-t az alut-nyík-re {komplex számok} *is jól kiterjeszthető, alkalmazhatni, ha* $a\dotplus b>c\dotplus d$ *(a, b, c, d fő-nyi* {valós} *lévén)* $a^2+b^2>c^2+d^2$*). Így legnagyobb(as) köz-osztó …*

A (800/3, 3^v, 4) levél az 1850-es évek közepén keletkezett. Erre egyértelműen következtethetünk a „*… már szinte egy fertály* {negyed} *évszázad (1831 első fele) óta …*" félmondatból.

Ezeken az oldalokon ugyanazt a tételt vizsgálja BOLYAI, mint a (7.11.§)-ban.

7.19. Bolyai János levele apjához

Szükségesnek találom megírni ezeket.

1. A küldött demonstrációm bár-is rútul írva, jó s directe nem lehet egyszerübbön; közelebb észrevéve, nem is tricás; egyébaránt nincs miért egy szót is írjak róla többöt, midőn a Disq. Ar.§96 ja 8 első rendjében indirecte *ugyan, de röviden, jól és szépen van már dem.-va.*

2. Wolfius abban is hibázott, hogy nem mondja meg, hogy y és x prímek legyenek; egyébaránt az ide küldött kifejezettje x-nek el van hibázva; ugyanis nem

$$\frac{y^n(2y-1)-1}{y^n(y-2)+1},$$

hanem

$$\frac{y^{n+1}-1}{y^n(y-2)+1}.$$

Hogy ez pro $y>2$, nem lehet egész, és a föladatnak meg nem felelhet, nagyon röviden kiviláglik onnan, hogy nyilván $<$

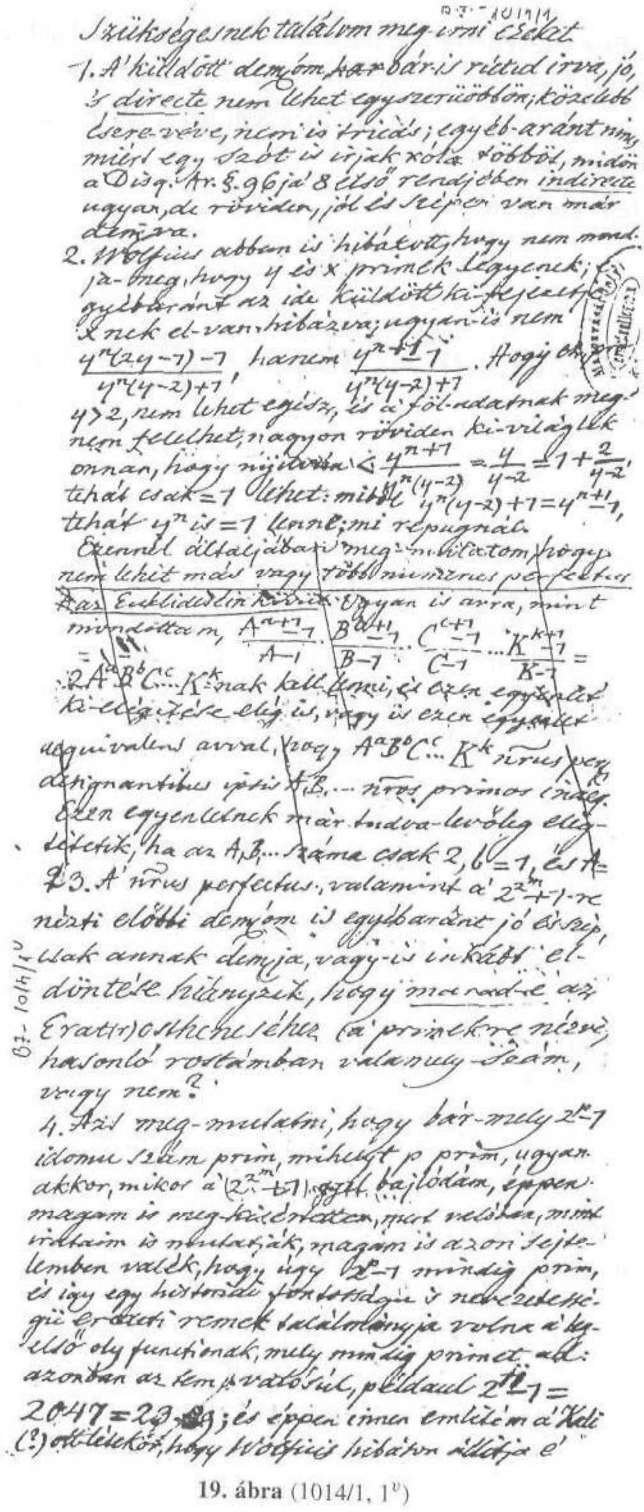
$$\frac{y^{n+1}}{y^n(y-2)}=\frac{y}{y-2}=1+\frac{2}{y-2},$$

tehát csak $=1$ lehet: miből $y^n(y-2)+1=y^{n+1}-1$, tehát y^n is $=1$ lenne; mi repugnál {visszautasít}.

3. A numerus perfectus (tökéletes szám), valamint a $2^{2^m}+1$-re nézti előbbi dem.-óm is egyébaránt jó és szép, csak annak dem-ja vagyis inkább eldöntése hiányzik, hogy marad*-e az Erat(r)ostheneséhez (a prímekre nézve) hasonló rostámban valamely szám, vagy nem?*

4. Azt megmutatni, hogy bármely 2^p-1 idomú szám prím, mihelyt p prím, ugyanakkor, mikor a $(2^{2^m}+1)$-gyel bajlódám, éppen magam is megkisértettem, mert valóban, mint irataim is mutatják, magam is azon sejtelemben valék, hogy úgy 2^p-1 mindig prím, és így egy historiai fontosságú s nevezetességű eredeti remek találmányja volna a legelső oly functionak, mely mindig prímet ad: azonban az sem valósul, például $2^{11}-1=2047=23\cdot 89$; és éppen innen említém a Káli(?) ottlétekor, hogy Wolfius hibásan állítja e

A levél (1014/1, 1^v) keletkezésének tekintetében biztos támpontunk BOLYAI-nak a 4. pontban tett megjegyzése. Ugyanis egy 1855. július 11-én kelt okmány (1509/1) üresen maradt részein még azt írja – hibásan – hogy ha p prím, akkor



Szükségesnek találom meg-írni ezeket.
1. A' küldött demóm, bár-is rútul írva, jó, 's directe nem lehet egyszerűöbbön; közelebb észre-véve, nem is tricás; egyéb-aránt nem, miért egy szót is írjak róla többöt, midön a Disq. Ar. §. 96ja' 8 első rendjében indirecte ugyan, de röviden, jól és szépen van már demzva.
2. Wolfius abban is hibázott, hogy nem mond-ja-meg, hogy y és x primek legyenek; egyébaránt az ide küldött ki-fejezés x-nek el-van hibázva; ugyan-is nem $\frac{y^n(2y-1)-1}{y^n(y-2)+1}$, hanem $\frac{y^{n+1}-1}{y^n(y-2)+1}$. Hogy ez, ha y>2, nem lehet egész, és a' föl-adatnak meg nem felelhet, nagyon röviden ki-világlik onnan, hogy nyilván $< \frac{y^{n+1}}{y^n(y-2)} = \frac{y}{y-2} = 1+\frac{2}{y-2}$, tehát csak = 1 lehet: miből $y^n(y-2)+1 = y^{n+1}-1$, tehát y^n is = 1 lenne; mi repugnál.
Ezennel általjában meg-mutattam, hogy nem lehet más vagy több numerus perfectus az Euklidesien kívül. Ugyan is arra, mint mondottam, $\frac{A^{a+1}-1}{A-1} \cdot \frac{B^{b+1}-1}{B-1} \cdot \frac{C^{c+1}-1}{C-1} \cdots \frac{K^{k+1}-1}{K-1} = 2A^aB^bC^c \cdots K^k$-nak kell lenni, 's ezen egyenlet ki-elégítése elég is, vagy is ezen egyenlet aequivalens avval, hogy $A^aB^bC^c \cdots K^k$ nrus perf. designantibus ipsis A, B, ... K nros primos inaeq. Ezen egyenletnek már tudva-levőleg elég-tétetik, ha az A, B, ... száma csak 2, b = 1, és A = 2.
3. A' nrus perfectus, valamint a' $2^{2^m}+1$-re nézti előbbi demóm is egyébaránt jó és szép, csak annak demja, vagy-is inkább el-döntése hiányzik, hogy marad-e az Erat(r)osthenesiéhez (a' primekre nézve) hasonló rostámban valamely szám, vagy nem?
4. Azt meg-mutatni, hogy bár-mely 2^p-1 idomu szám prím, mihelyt p prím, ugyan akkor, mikor a' $(2^{2^m}+1)$-gyel bajlódám, éppen magam is meg-kísértettem, mert velóban, mint írataim is mutatják, magam is azon sejtelemben valék, hogy így 2^p-1 mindig prím, és így egy hittorsai fontosságú 's nehézségű érdekű remek találmánya volna a' leg-első oly functiónak, mely mindig primet ad: azonban az tempvatosúl, például $2^{11}-1 = 2047 = 23 \cdot 89$; és éppen ennen emlékém a' Kali(?)ott lételekor, hogy Wolfius hibásan állítja e'

19. ábra (1014/1, 1v)

$2^p - 1$ is prím. Erre a tévedésre – amint írja – később rájött, tehát bizonyos, hogy e levél 1855. július 11-e utánról való (4.4.§).

Sajnos nem sikerült a kéziratokban meglelni azt a „*jó és szép*" bizonyítást, amelyet a 3. pontban említ.

A levél befejezése hiányzik.

8

Bolyai által használt műszavak és jelölések

BOLYAI JÁNOS följegyzéseiben leginkább a maga által szerkesztett jelöléseket és betűket használta. Sajátos módon alkotta meg az egyes fogalmak megnevezését is. Jelöléseinek bevezetését több esetben meg is indokolta s bízik abban, hogy azokat az utókor *„mohón"* elfogadja (2.7.§). Írás közben gyakran használt matematikai jeleket. Szinte egyetlen alkalommal sem írja le betűkkel, hogy „nagyobb", „kisebb", „végtelen", „hasonló". Ezeket a szavakat a $>$, $<$, ∞, $\sim$ szimbólumokkal helyettesíti szövegeiben.

Azzal, hogy sokszor eltért az ő idejében már elfogadott és alkalmazott jelölések használatától s nyelvezetét saját megnevezéseivel tűzdelte tele, alaposan megnehezíti kéziratos hagyatékának olvasását. Éppen ezért azok munkájának megkönnyítése érdekében, akik az elkövetkező években is tanulmányozni szeretnék BOLYAI írásait, összegyűjtöttük műszavainak és szimbólumainak nagy részét, amelyeket az alábbiakban ismertetünk.

Jegyzékünkben minden új fogalmat és jelet megszámoztunk, megadjuk a ma használatos elnevezést és jelölését s feltüntetjük a kézirathalmaz egy, esetenként több olyan oldalát, amelyen ez előfordul. Ezek a jelek, illetve fogalmak természetesen számos más oldalon is előbukkannak. BOLYAI JÁNOS az általa használt fogalmak és jelek közül többet édesapja tankönyveiből vett át. Megtörténik, hogy néha maga BOLYAI ad zárójelben magyarázatot egy-egy új szó értelmének megvilágítására. A szavakat nem szedtük az ábécé sorrendjébe, inkább a rokon értelműeket próbáltuk egy csoportba helyezni. Felsorolásunkból hiányoznak az Appendix jelölései, mert azok már régóta jól ismertek.

Ne lepődjünk meg, ha néha BOLYAI ugyanarra a fogalomra több elnevezést használ (például 7, 8, 9, 10), vagy egy szimbólummal különböző fogalmakat jelöl (például 75, 76, 77, 78).

1. *nyi-tan* (816/1^v) {matematika},
2. *nyiász* vagy *nyitanász* (710/2^v, 547/4^v) {matematikus},
3. *űrész* vagy *űr-tanász* (710/2^v) {geométer},
4. *nyi* (445/4) {mennyiség},
5. *tevő nyi* vagy *tevő szám* (445/4^v) {pozitív mennyiség},
6. *vevő nyi* (445/4^v) {negatív mennyiség},
7. *elegy nyi* vagy *elegyes szám* (1333/1) {„vegyes" komplex szám, vagyis olyan $a+ib$ alakú komplex szám, ahol sem a sem b nem nulla valós számok},
8. *al-ut-nyi* (1389/1^v) {komplex szám},
9. *pontos-* vagy *mellék-* vagy *oldalas-nyi* (445/4^v) {egy 1844-ben írt levélen még így nevezi a komplex számokat},
10. *al-nyi* (204/2) {komplex szám},
11. *tiszta szám* (1332/1) {olyan $a+ib$ alakú komplex szám, ahol $a=0$ vagy $b==0$},
12. *fő-ut-nyi* (804/2) {valós szám},
13. *főszám, előszám* (538/1), *szűkebb értelemben vett prímszám* (1431/1, 1^v), *edi-szám* (1015/1^v) {racionális egész prímszám},
14. *p Haupt Zahl* (40/2) {p racionális egész prímszám, csak ± 1 és $\pm p$-vel osztható},
15. *Haupt–Primzahl* (1190/1) {a $4m+1$ alakú prímszámok},
16. *Reelle Zahl* (762/5) {egész szám},
17. *tökélyes prímszámok* (1446/10) {komplex prímek, pontosan a $4m+1$ alakú prímszámok komplex tényezői mint pl. $1+2i$, $6-i$, ..., hasonlóképpen az $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ komplex prímek},
18. *abszolút* vagy *vegyes prímek* (1446/10, 10^v) {a $4m+3$ alakú prímszámok, vagyis azok a prímszámok, amelyek $\mathbb{Z}$-ben is és $\mathbb{Z}[i]$-ben is prímek: 3, 7, 11, ...},
19. *al (ut) prím* (1117/1^v oldaljegyzet,) *al (lap) szám* (538/1) {komplex prímek, $\mathbb{Z}[i]$ prímelemei, vagyis egy al(ut)prím lehet tökélyes vagy abszolút prím},
20. *sima-nyi* vagy *Glatte Zahl* (1213/1,1^v), (1468/1) {valós szám},
21. *sima-nyi* (1431/1, 1^v, 888/1^v, 1295/1) {ezeken az oldalakon valós egész számot jelent},
22. *sima-* vagy *egyenes szám* (445/4^v) {valós szám},

23. *reális szám* (1332/1) vagy *való-szám* (547/8^v) {Eléggé megtévesztő elnevezés, ui. Bolyai reális számon vagy való-számon következetesen egész számot ért},
24. *mérő* (1021/2^v, 1332/1) {osztó},
25. *mértárs, factor* (495/1^v) {a másik osztó, tényező},
26. *egymért* (1332/1), *factum* (495/1^v) {szorzat},
27. *mérzet, rang* (1309/5) {hatvány},
28. *rang-jel* (1032/40^v) {hatványkitevő},
29. *egymértezni* (396/7) {szorozni},
30. *mércím* (1391/4) {fokszám},
31. *idom* (703/3^v) {alak},
32. *torony* (1269/1^v) {tört, de azt is olvashatjuk, hogy *pirony* = *torony* = *piramis* (1291/1)},
33. *okadat* (495/1^v) {bizonyítás},
34. *üszony* (1044/1, 1214/68) {kifejezés},
35. *íz* (1018/1^v) {tag},
36. *Newton két íz-tana* (575/10) {Newton binomiális tétele},
37. *egyenlet szorzói* (1309/5^v) vagy *egyenletbeli mérttek* (663/2) {együtthatók},
38. *körcsere* (396/6^v) {ciklikus permutáció},
39. *gyökmérőrei szaggatással* (143/3) {gyöktényezőkre való bontással},
40. *apró tornyokra szaggatása vagy hasogatása* (1269/1^v) {résztörtekre való bontás},
41. *prímekre szaggatás* (1333/1^v) {prímtényezőkre való bontás},
42. *tely* (742/3) {köbtartalom},
43. *kerítény* (742/3, 1271/4) {kerület},
44. *egy-póti sor* (372/4, 697/1^v) {számtani sorozat},
45. *egy-pári sor* (372/4, 697/1^v) {mértani sorozat},
46. *zenei-sor* (372/4) {harmonikus sorozat},
47. *tulegy pári-sorozat* (335/17^v) {hipergeometriai sorozat},
48. *öszvéti sor* (1522/1) {magasabb rendű számtani sorozat},
49. *függöny* (571/1^v) {függvény},
50. *egylő* (536/20^v) {változó},
51. *becs* (396/7^v) {gyök, érték},

52. *geber* (547/2) {algebra},
53. *üd-tan* (547/2) {az algebrai egyenletek elmélete},
54. *üd-egyenletek* (1288/2^v) {algebrai egyenletek},
55. *üz-tan* (1192/2^v) {a kiküszöbölés elmélete},
56. *össz-szám* (1094/26) {összetett szám},
57. *prímtan* (1332/1) {a komplex egészek oszthatóságának elmélete, ritkábban „*imaginárius számelmélet*"},
58. *ösöny* (395/3) {integrál},
59. *szorzók* (703/1, 547/9) {együtthatók algebrai egyenletekben},
60. *kényleges* (703/1, 1297/1) {bármely, tetszőleges (547/6^v), más helyen ezt írja: *kényleges* vagy *ismeretlen* (547/10^v)},
61. *tiszta egyenlet* (547/1^v) {az $x^m - 1 = 0$ binom egyenlet},
62. *szér-becs* (547/2^v) {szélsőérték},
63. *közönien* (703/7^v) {általánosan, de azt is olvashatjuk: *közönien, vagy határzatlanul, vagy indefinite* (547/7^v)},
64. *terj* (1039/1) {terület},
65. *állány* (1039/1) {téglalap},
66. *csüggő vagy álló* (547/7) {merőleges},
67. *fentő* vagy *c(h)orda* (547/8^v) {húr}.

MEGJEGYZÉS

BOLYAI JÁNOS több fogalom megnevezését édesapjától kölcsönözte. BOLYAI FARKAS Az arithmetica eleje című munkájában is megtaláljuk például a rang (28), becs (51), elegy (7), okadat (33), előszám (13), egypóti (44) s egypári sorok (45) műszavakat.

A BOLYAI JÁNOS által leggyakrabban használt szimbólumok:

68. ⦶, ⊖ (445/4) {i, $-i$, $i = \sqrt{-1}$; Bolyai szerint $\sqrt{-1}$ becsei},
69. I_n (396/6) {az n-edrendű egységgyök, $I_n^n = 1$},
70. ⦶ és ⊖ (1335/6, 6^v, 1179/7^v, 267/16^v) {szinusz és koszinusz, de előfordulnak a sin és cos jelek is},
71. $\cap$ (495/1) {racionális szám, Bolyai megjegyzése (206/1^v): Vállas Antal szerint szertelen szám},
72. $\cup$ (399/12^v) {irracionális szám},
73. $r \subset x$ (1466/1) {r becse x-nek},

74. ȸ (1308/1), $\mathbf{d}$, $\dot{\odot}$ (1323/1) {differenciál, derivált},

75. f_m ($1297/3^v$) {faktoriális, $f_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$, *„némely írók szerint* $f_n = 1 \cdot 2 \cdot \cdot 3 \ldots n = n!$" (396/1)},

76. f_a ($703/6^v$) $\{f_a = (abc \ldots kl)^m = (a + 1_m b + 1_m^2 c + \ldots + 1_m^{m-2} k + 1_m^{m-1} l)^m$, (6.2.§)},

77. f_m (1369/1) $\{f_m = (1 + x)^m\}$,

78. f_x [20, 101 old.] {az x-nek valamely functiója (függvénye)},

79. $\times$ (982/19) {keresztbeszorzás},

80. $(a, b)^m$ ($517/7^v$) $\{= a(a + b)(a + 2b) \ldots [a + (m - 1)b]\}$,

81. $\subset \sqrt[4]{1}$ (759/3) {az 1 negyedrendű gyökei: ± 1, $\pm i$},

82. $\dot{\equiv}$ (982/19) {nem kongruens},

83. T (1301/8) $\{x T_a = l n a^x\}$,

84. T, (877/5) $\{T = \frac{\pi}{2}$, $\pi = 2\pi\}$,

85. π_q ($1389/11^v$) $\{= mod\, q\}$,

86. $\breve{0}$ (1389/3) {nulla, 1844-ben még a 0 jelet használja (7.2.§)},

87. O (1190/29) $\{a \equiv b \,(\bmod c)$ helyett $a \equiv b O c$, a geometriában Or az r sugarú kör abszolút geometriai kerületét jelöli},

88. ⊨ ($1404/2^v$, 1501/1) {egyenlő, ugyanaz, *„éppen oly"*},

89. $4m + 1$ prím $= \square + \square$ (1511/1, 1059/2) {Fermat két négyzetszámtétele}.

90. ◎ (703/5) $\left\{= \frac{\pi}{2}\right\}$,

91. ⊕, ⊖, ◌, ◌, ⊖ és ◌ (1297/3) {tangens, cotangens, szekáns, koszekáns, szinusz-verzusz ($= 1 - \cos x$) és koszinusz-verzusz ($= 1 - \sin x$)},

92. ς (1309/4, 1433/3) {logaritmus naturalis},

93. ς, ς (1309/5) {*„szorzony vagy factorial-jel, azaz* ς $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$" ($1298/2^v$)},

94. $\overset{m-1}{\underset{0}{\Sigma}}$ (757/1) $\left\{= \sum_{0}^{m-1}\right\}$.

Irodalom

[1] ALEXITS GYÖRGY, *Bolyai János világa*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.

[2] Anonymus writer, *Théorèmes et problèmes sur les nombres*, Jour. für Math., **6** (1830), 100–106.

[3] ÁCS TIBOR, *Bolyai János a bécsi császári-királyi mérnökakadémián, 1818–1823*, Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola, Budapest, 1997.

[4] BARNES, C. W., *The representation of primes of the form* $4n+1$ *as the sum of two squares*, Enseignement Math., **18**/2 (1972), 289–299.

[5] BARNES, C. W., *Primes of the form* $4n+1$ *which can be written as the sum of two squares*, J. Elisha – Mitchell – Sci. Soc., **89** (1973), 226–227.

[6] BENKŐ SAMU, *Bolyai János vallomásai*, Irodalmi Könyvkiadó, Bukarest, 1968. Második kiadás: Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1972.

[7] BENKŐ SAMU, *Őrszavak*, Művelődéstörténeti dolgozatok, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1984.

[8] BENKŐ SAMU, *Apa és fiú (Bolyai-tanulmányok)*, Magvető Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[9] Bolyai-emlékfüzet, *A Kilátó különszáma (Bolyai János halálának 125 évfordulóján)*, Tudományos Ismeretterjesztő Társulat Budapesti Szervezete, 1985. Összeállította és szerkesztette STAAR GYULA.

[10] BOLYAI FARKAS, *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae* ..., Tomus I-II, Marosvásárhely, 1832–33.

[11] BOLYAI FARKAS tíz levele (Közli: BENKŐ SAMU), Igaz Szó, **23** (1975), 3. szám, 262–273.

[12] Bolyai gyűjtemény, Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára, Budapest.

[13] BOLYAI IOANNES, *Appendix prima scientia spatii, a veritate aut falsitate axiomatis XI-mi Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independens: atque ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.* Marosvásárhely, 1831. április.

[14] BOLYAI JÁNOS, *Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.* Marosvásárhely, 1832 (BOLYAI FARKAS Tentamenjéhez kötve).

[15] BOLYAI JEAN, *La science absolue de l'espace* ... (J. HOÜEL fordítása), Bordeaux, 1867. Mem. V. 207–248.

[16] BOLYAI JOHN, *The science absolute of space.* Translated from the original Latin by GEORGE HALSTED, 1891.

[17] BOLYAI JÁNOS *élete és műve* (Tanulmánykötet), Állami Tudományos Könyvkiadó, Bukarest, 1953.

[18] BOLYAI JÁNOS *kéziratos hagyatéka,* Marosvásárhely, Bolyai–Teleki Könyvtár.

[19] BOLYAI JÁNOS*ra emlékezünk! Születésének 175. évfordulóján.* Tudományos Ismeretterjesztő Társulat Budapesti Szervezete, 1978. Szerkesztette: STAAR GYULA.

[20] *Bolyai-levelek* (BENKŐ SAMU gondozásában), Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1975.

[21] BONOLA, R., *La geometria non-euclidean,* Bologna, 1906. Német fordítás 1908, orosz fordítás 1910, angol fordítás 1911. Reprint angol kiadás: *Non-Euclidean Geometry,* New York: Dover, 1955.

[22] *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling* (Kiadó: CLEMENS SCHAEFER), Berlin, 1927.

[23] *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss – Friedrich Wilhelm Bessel,* Georg Olms Verlag, Hildesheim – New York, 1975.

[24] *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher,* Georg Olms Verlag, Hildesheim – New York, 1975. Teil 1.

[25] *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, Georg Olms Verlag, Hildesheim – New York, 1975. Teil 3.

[26] BURTON, M. D., *The History of Mathematics*, An introduction, USA, 1984.

[27] CARMICHAEL R. D., *Note on a new number theory function*, Bull. Amer. Math. Soc., **16** (1909–1910), 232–238.

[28] CARMICHAEL R. D., *On composite numbers P which satisfy the Fermat congruence* $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$. Amer. Math. Monthly, **19** (1912), 22–27.

[29] CHERNIK, J., *On Fermat's simple theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., **45** (1939), 269–274.

[30] CIPOLLA, M., *Sui numeri composti P, che verificano la congruenza di Fermat* $a^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$, Annali di Matematica, **9** (1904), 139–160.

[31] CUNNIGHAM, A., Math. Quest. Educat. Times, (2), **14** (1908), 22–23.

[32] DÁVID LAJOS, *A két Bolyai élete és munkássága*, Budapest 1923, Németh József Könyvkiadó Vállalata (Második bővített kiadás: Gondolat, Budapest, 1979).

[33] DÁVID LAJOS, *Bolyai-geometria az Appendix alapján*, Minerva Rt. Kolozsvár, 1944 (1992-ben a Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola Budapesten újra kiadta).

[34] DÁVID LAJOS, *Die beiden Bolyai*, Elemente der Mathematik, Beihefte, Basel, 1951, No.**11**, 2–24.

[35] DEÉ NAGY ANIKÓ, *A két Bolyai könyvtára*, Könyvtári Szemle, **12** évfolyam, 1968/1, Bukarest, 19–25.

[36] DEÉ NAGY ANIKÓ, *A könyvtáralapító Teleki Sámuel*, Az Erdélyi Múzeum-Egyesület kiadása, Kolozsvár, 1997.

[37] DICKSON, L. E., *History of the theory of numbers, I-III.*, Reprinted from the first edition, Chelsea Publ. Comp., New York, 1971.

[38] EISENSTEIN, G., *Beiträge zur Kreistheilung*, Jour. für Math., **27** (1844), Heft 3., 269–278.

[39] ENGEL, F. *N. I. Lobatschefskij Zwei geometrische Abhandlungen*, Leipzig, 1898.

[40] ERDŐS PÁL, *On the Converse of Fermat's theorem*, Amer. Math. Monthly, **56** (1949), 623–624.

[41] ERDŐS PÁL – SURÁNYI JÁNOS, *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.

[42] ESCOTT, E. B., *The Converse of Fermat's Theorem*, Messenger of Mathematics, **36** (1907), 175–176.

[43] EWELL, J. A., *A simple proof of Fermat's two-square theorem*, Amer. Math. Monthly, **90**/9(1983), 635–637.

[44] FINE, B., *A note on the two-square theorem*, Canad. Math. Bull., **20**/1 (1977), 93–94.

[45] FRÁTER JÁNOSNÉ, *A Bolyai gyűjtemény*, MTA Könyvtára, Budapest, 1968.

[46] FRÁTER JÁNOSNÉ, *Bolyai Farkas könyvtára*, MTA III. Osztályának Közleményei, **19** (1969), 271–294.

[47] FRISCHAUF, J., *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai*, Leipzig, 1872.

[48] GAUSS, C. F., *Theoria residuorum biquadraticorum*. Commentatio secunda, Göttingische gelehrte Anzeigen, Göttingen 1831, Stück 64, 625–638.

[49] GAUSS, C. F., *Theoria residuorum biquadraticorum*. Commentatio secunda, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Recentiores, Vol. VII. (1832), Göttingen, cl. math. 89–148.

[50] GAUSS, C. F., *Werke*, Band II., Teubner, Göttingen, 1863, 93–148.

[51] GAUSS, C. F., *Untersuchungen über höhere Arithmetik*, (H. MASER fordítása) Springer Verlag, Berlin 1889, 534–586.

[52] GAUSS, C. F., *Werke*, Band VIII., Teubner, Göttingen, 1900.

[53] GERGELY JENŐ, *A nem-euklidesi geometria ismertetése Bolyai János „Appendix"-e nyomán*. A [17]-ben, 96–169.

[54] GRAY J., *Ideas of Space*, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[55] GRAY J., *Non-Euclidean Geometry – A Re-Interpretation*, Historia Mathematica **6** (1979), 236–258.

[56] GYARMATI EDIT, *Számelmélet (*TURÁN PÁL *előadásai alapján)*, Kézirat, 10. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[57] HERMITE, CH., *Note sur un théorème relatif aux nombres entiers*, Journal de Math. pures et appliquées, **13** (1848), 15.

[58] JEANS, J. H. *The Converse of Fermat's Theorem*, Messenger of Mathematics **27** (1897–1898), 174.

[59] KÁLMÁN ATTILA, *Nemeuklidészi geometriák elemei*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[60] KÁRTESZI FERENC, *Az Appendix előzményei és tudományos eredményei*, Matematikai Lapok, Budapest, **31** (1978–1983), 1–3, 15–22.

[61] KÁRTESZI FERENC, *Bolyai János: Appendix, A tér tudománya*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973. A könyvnek létezik angol kiadása is. Az Akadémiai Kiadó jelentette meg 1987-ben.

[62] KISS ELEMÉR, *A magasabbrendű számtani haladvány értelmezése a Tentamenben*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, **30** (1982), 9–10 szám, 373–375.

[63] KISS ELEMÉR, *A „Bolyai-ládák" legújabb titkai*, Természet Világa, Budapest, **125** (1994), 9. szám, 405–408.

[64] KISS ELEMÉR, *Fermat's Theorem in János Bolyai's Manuscripts*, Mathematica Pannonica, Leoben–Miskolc–Trieste, **6** (1995), nr.2, 237–242.

[65] KISS ELEMÉR, *Álprímek Bolyai János kéziratos hagyatékában*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, **43** (1995), 9. szám, 321–324.

[66] KISS ELEMÉR, *On the algebraic and number theoretic researches of János Bolyai*, Proceedings of the sixth symposium of mathematics and its application, 3–4 November 1995, Timişoara, 1995, 85–88.

[67] KISS ELEMÉR, *János Bolyai the First Hungarian Number Theorist*, Mathematical and Physical Journal for Secondary Schools (KöMaL), Special English language issue 1996, 8–10.

[68] KISS ELEMÉR, *Foglalkozott-e számelmélettel Bolyai János?*, Természet Világa, Budapest, **127** (1996), 8. szám, 344–348.

[69] KISS ELEMÉR, *Kérdések Bolyai János kutatásairól*, Természet Világa, Budapest, **127** (1996), 11. szám, 522–523.

[70] KISS ELEMÉR, *Bolyai János vizsgálatai az ötöd- és magasabb fokú algebrai egyenletek megoldhatóságáról*, Pi, Matematikai Folyóirat, Miskolci Egyetem, 1995/96, 19–22.

[71] KISS ELEMÉR, *Bolyai János vizsgálatai a $4n+1$ alakú prímszámok két négyzet összegére való felbontásáról*, Polygon, Szeged, **6** (1996), 2. szám, 1–11.

[72] KISS ELEMÉR, *On the algebraic and number theoretic researches of János Bolyai*, Department of Mathematics, „Petru Maior" University of Târgu-Mureş, Preprint **5** 1996, 3–46.

[73] KISS ELEMÉR, *A short proof of Fermat's two-square theorem given by János Bolyai*, Mathematica Pannonica, Leoben–Pécs–Trieste, **8** (1997), nr. 2, 293–295.

[74] KISS ELEMÉR, *Priorities of János Bolyai's in arithmetical researches*, Non-Euclidean Geometry in Modern Physics, Proceedings of the International Conference held in Uzhgorod, August 13–16, 1997, Kiew 1997, 81–89.

[75] KISS ELEMÉR, *Bolyai János prímtana*, Polygon, Szeged, **8** (1998), 1. szám, 1–11.

[76] KISS ELEMÉR, *Notes on János Bolyai's Researches in Number Theory*, Historia Mathematica, **25** (1999), nr. 1. (Sajtó alatt)

[77] KLINE, M. J., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, London, New York, Oxford University Press, 1972.

[78] KOMJÁTH PÉTER, *Újabb eredmények a számítógéptudományban*, Természet Világa, Budapest, **125** (1994), 9 szám, 417.

[79] KONCZ JÓZSEF, *A marosvásárhelyi Evang. Reform. Kollégium története*, Marosvásárhely, 1896.

[80] KOZMA BÉLA, *Füzetlen orientál gyöngyök (Bolyai Farkas aforizmái)*, Mentor Kiadó, Marosvásárhely, 1994.

[81] LAGRANGE, J. L., *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Paris, 1770.

[82] LEHMER, D.N., *List of prime numbers from 1 to 10.006.721* Washington D.C. Carnegie Institution of Washington Publication No. 165, 1914 (Orosz kiadás, Moszkva 1957).

[83] LEHMER, D.N., *Tests for primality by the converse of Fermat's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., **33** (1927), 327–340.

[84] LEHMER, D.N., *On the Converse of Fermat's Theorem*, Amer. Math. Monthly, **43** (1936), 347–354.

[85] *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Herausgegeben von S. GOTTWALD, H. I. ILGANDS, K. H. SCHOTE, Bibliografisches Institut, Leipzig, 1990.

[86] LIPSCHITZ, R., *Researches sur la transformation, par des substitution rèelles, d'une somme de deux où trois carrés en elle-mème*, Jour. de Math., (4), **2** (1886), 373–439.

[87] LOBACSEVSZKIJ, N. I., *Géometrie imaginaire*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **17** (1837), Heft 4, 295–320.

[88] LOBACSEVSZKIJ, N. I., *Probabilité des résultats moyens et tirés d'observations répetées*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **24** (1842), Heft 2, 164–170.

[89] LOBACSEVSZKIJ, N. I., *Geometrische Untersuchungen zur Théorie der Parallellinien*, Berlin, 1840.

[90] LOBACSEVSZKIJ, N. I., *Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből* (V. F. KAGAN bevezetésével, magyarázataival, függelékével), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.

[91] LUCAS, E., *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*, Assoc. franc. avanc. sc., **5** (1876), 289–321.

[92] LUCAS, E., *Théorie des nombres*, I, Paris, 1891.

[93] NEUMANN – SALLÓ – TORÓ, *A semmiből egy új világot teremtettem*, Facla Könyvkiadó, Temesvár, 1974.

[94] RAPCSÁK ANDRÁS, *Az Appendix hatása a modern matematikára*, Matematikai Lapok, Budapest, **31** (1978–1983), 1–3 szám, 23–28.

[95] SARLÓSKA ERNŐ, *Bolyai János – a katona*, A MTA. Mat. és Fiz. Tud. Osztályának Közleményei, Akadémiai Kiadó, Budapest, **15** (1965), 4. szám, 341–387.

[96] SARRUS, F., *Démonstration de la fausseté du théorème énoncé à la page 320 du IX-e volume de ce recueil*, Annales de Math., (ed. Georgonne), **10** (1819–20), 184–187.

[97] SÁRKÖZY ANDRÁS, *Számelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

[98] SÁRKÖZY ANDRÁS – SURÁNYI JÁNOS, *Számelméleti Feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[99] SCHINZEL, A., *Sur les nombres composés n qui divisent* $a^n - a$, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo VII (1958), 37–41.

[100] SCHMIDT, F., *Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker, Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya*, Grunerts Archiv der Math. und Phys. Greifswald **48** (1868), 217–228.

[101] SCHMIDT, F. – STÄCKEL, P., *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai*, Leipzig, 1899.

[102] SIERPINSKI, W., *Elementary Theory of Numbers*, Warszawa, 1964.

[103] SKLJARSZKIJ, D. O. – CSENKOV, N. N. – JAGLOM, I. M., *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, I. rész, Aritmetika és algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

[104] STÄCKEL, P., *A képzetes számok elmélete Bolyai János hátrahagyott irataiban*, Matematikai és Természettudományi Értesítő, Budapest, **17** (1899), 3. füzet, 259–292.

[105] STÄCKEL, P. és KÜRSCHÁK JÓZSEF, *Bolyai János észrevételei Lobacsevszkij Miklósnak a paralelákra vonatkozó vizsgálataira*, Matematikai és Természettudományi Értesítő, Budapest, **20** (1902), 40–67.

[106] STÄCKEL, P., *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai*, I-II kötet, Magyarra fordította Rados Ignác, Budapest, 1914. (Ugyanez németül Leipzig–Berlin, 1913.)

[107] STRUIK, D. J., *A matematika rövid története*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1958.

[108] SZÁSZ PÁL, *Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

[109] SZÁSZ PÁL, *N. I. Lobacsevszkij „Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből" c. könyvéből*, A MTA III. Osztályának Közleményei **2** (1952).

[110] SZÉNÁSSY BARNA, *A magyarországi matematika története (A legrégibb időktől a 20. század elejéig)*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970.

[111] SZÉNÁSSY BARNA, *Bolyai Farkas*, Akadémiai Kiadó, 1975.

[112] SZÉNÁSSY BARNA, *Bolyai János*, Akadémiai Kiadó, 1978.

[113] SZÉNÁSSY BARNA, *Kérdések és válaszok*, A [19] kötetben, 29–40.

[114] SZÉNÁSSY BARNA, *Megjegyzések Gauss nemeuklidészi geometriai eredményeihez*, Matematikai Lapok, Budapest, **28** (1980), 1–3 szám, 133–140.

[115] SZÉNÁSSY BARNA, *Adalékok a két Bolyai felfedezésének történetéhez*, Matematikai Lapok, **29** (1977–1981), 1–3 szám, 71–95.

[116] SZÉNÁSSY BARNA, *A két Bolyai életútja és a Tentamen tudományos jelentősége*, Matematikai Lapok, Budapest, **31** (1978–1983), 1–3 szám, 3–14.

[117] SZÉNÁSSY BARNA, *History of mathematics in Hungary until the 20-th Century*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1992.

[118] SZŐKEFALVI-NAGY GYULA, *Bolyai János szögharmadolása*, Matematikai Lapok, Budapest, **1** (1950), 84–85.

[119] TORÓ TIBOR, *Nemeuklidészi geometriák a modern fizikában és a relativisztikus kozmológiában*, Korunk Évkönyv, Kolozsvár, 1973, 245–256.

[120] TURÁN PÁL – LÁNCZI IVÁNNÉ, *Számelmélet*, ELTE jegyzet.

[121] VAROUCHAS, I., *Une démonstration élementaire du théorème des deux carrés*, I.R.E.M., Bull. No.6 (1984), 31–39.

[122] VÁLYI GYULA, *Bolyai János „Appendixéről"amely*. Dr. Vályi Gyula előadásai után litografálva, Kolozsvár, 1904.

[123] VEKERDI LÁSZLÓ, *A Bolyai-kutatás változásai*, Természet Világa, Budapest, **112** (1981), 2 szám, 56–58.

[124] VEKERDI LÁSZLÓ, *A Tudománynak háza vagyon*, Magyar Tudománytörténeti Intézet, Piliscsaba – Budapest, 1996.

[125] WANTZEL, P. L., *Société philomatique de Paris (Extraits des Procès-verbaux des séances)*, Paris, 1848, 19–22.

[126] WESZELY TIBOR, *Bolyai Farkas, a matematikus*, Tudományos Könyvkiadó, Bukarest, 1974.

[127] WESZELY TIBOR, *Bolyai János matematikai munkássága*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1981.

[128] WESZELY TIBOR, *Bolyai János kézirataiban hátrahagyott matematikai munkáiból*, Matematikai Lapok, Budapest, **31** (1978–1983), 1–3 szám, 29–37.

[129] WESZELY TIBOR, *Bolyai János emlékezete*, A [9] kötetben, 7–18.

[130] ZAGIER, D., *A one-sentence proof that every prime* $p \equiv 1 \pmod 4$ *is a sum of two squares*, Amer. Math. Monthly, **97** (1990), no.2, 144.

Tárgymutató

A

B

C

A kiadásért felelős
az Akadémiai Kiadó Rt. és a TypoTEX Kft. ügyvezető igazgatója
A nyomdai munkálatokat az Akaprint Kft. végezte
Felelős vezető: Freier László
Budapest, 1999
Felelős szerkesztő: Nagy Tibor
Kiadványszám: KMA8-067
Megjelent 19,3 (A/5) ív terjedelemben